

С. Г. МИХЛИН

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 29 V 1953)

§ 1. Пусть  $\Omega$  — бесконечная область  $m$ -мерного евклидова пространства и пусть граница  $S$  этой области лежит в конечной части пространства. Поставим задачу об интегрировании в  $\Omega$  уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(x); \quad f(x) \in L_2(\Omega) \quad (1)$$

при краевом условии

$$u|_S = 0, \quad (2)$$

которое будем понимать в смысле Р. Куранта <sup>(1)</sup> или С. Л. Соболева <sup>(2)</sup>.

Рассмотрим множество  $M$  функций, которые дважды непрерывно дифференцируемы в  $\Omega$  и обращаются в нуль как в пограничной полосе поверхности  $S$ , так и вне некоторой сферы. Можно доказать, что оператор  $-\Delta$  положительный, но не положительно-определенный\* в пространстве  $L_2(\Omega)$  на множестве  $M$ .

§ 2. Пусть  $A$  — положительный, но не положительно-определенный оператор в данном гильбертовом пространстве  $H$ . Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad f \in H. \quad (3)$$

Его решение равносильно нахождению минимума функционала

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u). \quad (4)$$

В области  $D(A)$  определения оператора  $A$  введем новую метрику, полагая

$$[u, v] = (Au, v), \quad \|u\|^2 = (Au, u), \quad (5)$$

и замкнем  $D(A)$  в этой метрике. Полученное таким образом полное гильбертово пространство обозначим через  $H_A$ . Так как оператор  $A$  не положительно-определенный, то некоторые из идеальных элементов пространства  $H_A$  не принадлежат пространству  $H$ .

Выделим тот случай, когда функционал  $(u, f)$ , определенный на элементах, общих  $H_A$  и  $H$ , ограничен в  $H_A$ . Тогда существует такой вполне определенный элемент  $u_0 \in H_A$ , что  $(u, f) = [u, u_0]$ , каков бы ни был элемент  $u \in H_A$ , и, следовательно,

$$F(u) = \|u - u_0\|^2 - \|u_0\|^2. \quad (6)$$

\* По поводу терминологии см. <sup>(3)</sup>.

Формула (6) позволяет расширить функционал  $F(u)$  на все пространство  $H_A$ ; очевидно, элемент  $u_0$  реализует минимум функционала  $F(u)$  в этом пространстве. Назовем  $u_0$  особенным решением уравнения (3). В частном случае, когда  $u_0 \in H$ , уместно назвать  $u_0$  обобщенным решением уравнения (3).

Цель настоящей заметки — охарактеризовать особенные решения упомянутого выше уравнения Пуассона.

Опираясь на «теоремы вложения» С. Л. Соболева <sup>(2)</sup>, нетрудно доказать, что пространство  $H_A = H_{-\Delta}$  в этом случае состоит из функций, квадратично суммируемых в каждой конечной подобласти  $\Omega$ , имеющих квадратично суммируемые в  $\Omega$  обобщенные первые производные и с любой степенью точности аппроксимируемые, в смысле средней квадратичной близости их градиентов, функциями из  $M$ . Очевидно, функции из  $H_A$  удовлетворяют краевому условию (2) в смысле Куранта.

§ 3. Будем говорить, что вектор  $\mathbf{G}(x)$ , абсолютная величина которого суммируема в  $\Omega$ , имеет в  $\Omega$  обобщенную дивергенцию  $g(x)$ , если тождество

$$\int_{\Omega} \varphi(x) g(x) d\Omega = - \int_{\Omega} \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{G}(x) d\Omega \quad (7)$$

имеет место для всякой функции  $\varphi(x)$ , непрерывно дифференцируемой в  $\Omega$  и равной нулю как в пограничной полосе поверхности  $S$ , так и вне некоторой сферы. Будем писать  $g(x) = \text{div } \mathbf{G}(x)$ .

Теорема 1. Уравнение (1) при краевом условии (2) имеет особенное решение, если  $f(x) = \text{div } \mathbf{F}(x)$  и  $\mathbf{F}(x) \in L_2 \Omega^*$ , при этом имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} (\text{grad } u_0)^2 d\Omega \leq C \int_{\Omega} \{F^2(x) + f^2(x)\} d\Omega, \quad (8)$$

где  $u_0$  — упомянутое особенное решение и  $C$  — некоторая постоянная, зависящая только от области  $\Omega$ .

Теорема 2. В условиях теоремы 1 особенное решение имеет обобщенные вторые производные, квадратично суммируемые в любой конечной внутренней подобласти  $\Omega$ , и почти всюду удовлетворяет уравнению (1).

Теорема 3. Если уравнение (1) при краевом условии (2) имеет особенное решение, которое в каждой конечной внутренней подобласти  $\Omega$  обладает квадратично суммируемыми обобщенными вторыми производными и почти всюду в  $\Omega$  удовлетворяет уравнению (1), то существует такой вектор  $\mathbf{F}(x)$ , что  $\mathbf{F}(x) \in L_2(\Omega)$  и  $f(x) = \text{div } \mathbf{F}(x)$ .

Теорема 4. Если  $f(x) = \text{div } \mathbf{F}(x)$ ,  $\mathbf{F}(x) \in L_2(\Omega)$ , и все составляющие вектора  $\mathbf{F}(x)$  имеют квадратично суммируемые в  $\Omega$  обобщенные первые производные, то особенное решение уравнения (1) при краевом условии (2) имеет обобщенные вторые производные, квадратично суммируемые в любой внутренней бесконечной подобласти  $\Omega$ .

В заключение отметим условие, достаточное для того, чтобы  $f(x) = \text{div } \mathbf{F}(x)$ , где  $\mathbf{F}(x) \in L_2(\Omega)$ .

Именно, пусть  $x$  и  $y$  — точки области  $\Omega$ ;  $r$  — расстояние между ними;  $\rho$  — расстояние от точки  $y$  до начала координат;  $\alpha(\rho)$  — функция, равная нулю при  $\rho < 1$  и единице при  $\rho \geq 1$ . Положим

$$\psi(x) = c_m \int_{\Omega} f(y) \left[ \frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\alpha(\rho)}{\rho^{m-2}} \right] d\Omega_y; \quad c_m = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2(m-2)\pi^{m/2}};$$

\* Символом  $F(x)$  мы обозначаем абсолютную величину вектора  $\mathbf{F}(x)$ .

при  $m = 2$  следует заменить  $r^{2-m}$  через  $-\ln r$  и  $c_m$  через  $1/2\pi$ . Упомянутое выше условие состоит в том, чтобы первые производные от  $\psi(x)$  были квадратично суммируемы в  $\Omega$ ; в этом случае можно положить  $F(x) = -\text{grad } \psi(x)$ .

§ 4. При известных условиях относительно коэффициентов  $A_{ik}$  сформулированные выше результаты имеют место и для эллиптического уравнения вида

$$-\sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = f(x).$$

Теоремы, аналогичные вышеприведенным, нетрудно установить и для уравнений теории упругости.

Поступило  
14 V 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945.  
<sup>2</sup> С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа к математической физике, 1950. <sup>3</sup> С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, 1950.