Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 5

МАТЕМАТИКА

С. Н. КРАЧКОВСКИЙ

О СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННЫХ С ЕГО ОБОБЩЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ ФРЕДГОЛЬМА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 VI 1953)

В настоящей заметке изложено некоторое обобщение результатов, содержащихся в [1], которые относятся к каноническому представлению нульэлементов линейного ограниченного оператора, определенного на комплексном пространстве R типа (B) и отображающего это пространство в себя.

Назовем нормально разрешимый оператор T сингулярным, если решения уравнений $Tx=0$ и $T^*X=0$, где T^* — оператор, сопряженный с T, образуют конечномерные пространства, размерности r' и r'' которых могут быть различными. Разность $r'-r''$ называется при этом индексом оператора T. В частном случае, когда $r'=r''$, оператор T будем называть регулярным.

Пусть A — какой-нибудь линейный ограниченный оператор, а $T_\lambda = E - \lambda A$, где E — тождественный оператор, λ — комплексный параметр. Обобщенной областью Фредгольма оператора A называется множество S_A тех точек комплексной плоскости λ, для которых оператор T_λ сингулярен. Обобщенная область Фредгольма есть открытое множество и, следовательно, состоит из конечного или счетного числа непересекающихся связных открытых множеств — компонент. Для всех точек одной и той же компоненты индекс оператора T_λ сохраняет одно и то же значение ([2], стр. 11). Сумма тех компонент, которым соответствует нулевой индекс, есть, согласно определению, область Фредгольма оператора A.

Рассмотрим какую-нибудь компоненту G области S_A, и пусть $\lambda_0 \in G$. Как и в случае, когда λ_0 принадлежит области Фредгольма, все линейно независимые нульэлементы $\overset{\nu}{x}_k$ оператора A, отвечающие значению λ_0, можно расположить в виде таблицы, состоящей из s бесконечных и p конечных строк

$$\begin{aligned} & \overset{1}{x}_k,\ \overset{2}{x}_k, \ldots \qquad\qquad (k=1,\,2,\ldots,\,s); \\ & \overset{1}{x}_{s+k},\ \overset{2}{x}_{s+k}, \ldots,\ \overset{r_k}{x}_{s+k}\ (k=1,\,2,\ldots,\,p), \end{aligned} \tag{1}$$

где числа s и p могут, в частности, быть равны нулю. Первый элемент каждой строки является собственным элементом оператора A, а остальные суть нульэлементы, расположенные в порядке возрастания их ранга и удовлетворяющие соотношениям (2) заметки [1]. Отсюда сразу следует, что каковы бы ни были элементы, составляющие таблицу (1), числа s, p и r_k $(k=1,\,2,\ldots,\,p)$, всегда одни и те же для данного значения λ_0.

Аналогичным образом, все линейно независимые нульэлементы $X_k^{\wedge}$ сопряженного оператора A^*, отвечающие значению λ_0, можно расположить в виде таблиц

$$\begin{aligned} &X_k^1,\ X_k^2, \dots && (k = 1,\ 2, \dots,\ t); \\ &X_{t+k}^1,\ X_{t+k}^2, \dots,\ X_{t+k}^{\nu_k} && (k = 1,\ 2, \dots,\ q). \end{aligned} \tag{2}$$

При этом, так как x_k^1 $(k = 1,\ 2, \dots,\ s + p)$ (соответственно, X_k^1 $(k = 1, 2, \dots,\ t + q)$ суть всевозможные линейно независимые собственные элементы оператора A (соответственно, A^*), отвечающие значению λ_0, то разность $r_{\lambda_0} = s + p - (t + q)$ есть индекс оператора $T_{\lambda_0} = E - \lambda_0 A$.

Теорема 1. *В таблицах* (1) *и* (2) *содержится одинаковое число конечных строк, состоящих, соответственно, из одинакового числа элементов:*

$$p = q, \quad r_k = \nu_k \quad (k = 1,\ 2, \dots,\ p). \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим итерированный оператор $T_{\lambda_0}^n$. В отвечающей ему таблице нульэлементов число бесконечных строк будет ns, а число конечных строк равно числу тех элементов из конечных строк таблицы (1), ранг которых не превышает n. Аналогичный результат имеет место и для n-й итерации сопряженного оператора $T_{\lambda_0}^*$. Приняв теперь во внимание, что индекс итерированного оператора равен индексу исходного оператора, умноженному на показатель итерации ([2], стр. 8), получаем требуемые равенства (3).

На основании этой теоремы нетрудно видеть, что элементы конечных строк в таблицах (1) и (2) можно выбрать так, чтобы выписанные подряд конечные строки таблицы (1) образовали биортогональную систему с выписанными подряд конечными строками таблицы (2), написанными в противоположном порядке (т. е. так, что начальный элемент не есть собственный). Имея это в виду, можно построить конечномерный оператор A_0, который вберет в себя все нульэлементы оператора A, составляющие конечные строки таблицы (1) и отвечающие собственному значению λ_0. При этом разность $A_1 = A - A_0$ (соответственно, $A_1^* = A^* - A_0^*$) будет оператором, имеющим для всех значений λ в точности те же нульэлементы (вплоть до структуры таблиц), что и оператор A (соответственно, A^*), за исключением тех нульэлементов последнего, которые образуют конечные строки таблицы (1) (соответственно — (2)), отвечающей фиксированному значению λ_0.

Построенные операторы A_1 и A_1^* могут быть использованы далее для доказательства существования такой окрестности D значения λ_0, каждой точке которой (за исключением самой точки λ_0, если $p \neq 0$) соответствует ровно s линейно независимых собственных элементов оператора A и t линейно независимых собственных элементов оператора A^*. Это предложение доказывается совершенно так же, как и теорема 1 заметки ([1]). Некоторое осложнение появляется только в тот момент, когда оператор $E - \lambda_0 A_1$ записывается в виде $U + V$. Так как в настоящем случае $E - \lambda_0 A_1$ — сингулярный оператор, то, на основании критерия сингулярности ([3], стр. 5) можно считать по крайней мере один из двух операторов U или U^* непрерывно обратимым, а V — вполне непрерывным. Смотря по тому, какой из операторов U или U^* окажется непрерывно обратимым, рассуждение, примененное далее при доказательстве упомянутой теоремы 1, проводится для оператора A или, соответственно, A^*. После этого, для завершения доказательства, остается только вспомнить постоянство индекса оператора T_λ для всех λ внутри одной и той же компоненты.

Теорема 2. *Для всех значений λ, взятых из одной и той же компоненты G области S_A, числа s и t бесконечных строк в таблицах* (1) *и* (2) *постоянны.*

Доказательство. Прежде всего нетрудно видеть, что числа s и t постоянны для всех значений λ из упомянутой выше окрестности D. Применяя, далее, лемму Гейне — Бореля, убеждаемся, что эти числа постоянны и при изменении λ во всей компоненте G области S_A.

Итак, каждой компоненте обобщенной области Фредгольма отвечают определенные числа s и t бесконечных строк нульэлементов, соответственно, операторов A и A^*. Разность $s-t$ этих чисел есть индекс оператора T_λ. Что касается конечных строк, то они могут появляться в таблицах (1) и (2) только для значений λ, образующих множество, состоящее из изолированных точек в соответствующей компоненте. Отсюда, в частности, получается результат М. А. Гольдмана ([3], стр. 6), заключающийся в том, что: 1) каждая компонента области S_A состоит либо только из тех значений λ, которым отвечает конечное число линейно независимых нульэлементов, либо только из тех, которым отвечает бесконечное число линейно независимых нульэлементов; 2) в каждой компоненте первого типа собственные значения суть изолированные точки, тогда как компоненты второго типа состоят сплошь из собственных значений.

Поступило
28 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Крачковский, ДАН, 88, № 2 (1953). [2] Ф. В. Аткинсон, Матем. сборн., 28 (70) : 1 (1951). [3] М. А. Гольдман, Автореферат диссертации, Рига, 1951.