Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОМОМОРФИЗМОВ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ *

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 VI 1953)

§ 1. Введение. С каждой компактной группой Ли $\mathfrak{G}$ связываются две градуированных алгебры: алгебра гомологий (или алгебра Понтрягина) $\mathfrak{H}=\Sigma\mathfrak{H}^k$ и алгебра ∇-гомологий (или алгебра Колмогорова — Александера) $\overline{\mathfrak{H}}=\Sigma\overline{\mathfrak{H}}^k$. (Алгебру $\overline{\mathfrak{H}}$ можно отождествить с алгеброй (двухсторонне) инвариантных дифференциальных форм на группе $\mathfrak{G}$.) На паре пространств $\overline{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{H}$ задается невырожденное скалярное произведение (ξ, x) $(\xi\in\overline{\mathfrak{H}},\ x\in\mathfrak{H})$ (если интерпретировать ξ как инвариантную дифференциальную форму, то (ξ, x) истолковывается как интеграл ξ по циклу x). В $\mathfrak{H}$ и $\overline{\mathfrak{H}}$ выделяются подпространства примитивных элементов $\mathfrak{P}=\Sigma\mathfrak{P}^k$ и $\overline{\mathfrak{P}}=\Sigma\overline{\mathfrak{P}}^k$ $(\mathfrak{P}^k=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}^k,\ \overline{\mathfrak{P}}^k=\overline{\mathfrak{P}}\cap\overline{\mathfrak{H}}^k)$. Гомоморфизм F компактной группы Ли $\mathfrak{G}$ в компактную группу Ли $\mathfrak{G}'$ индуцирует гомоморфизм F алгебры $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ в алгебру $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}')$ и (сопряженный) гомоморфизм F^* алгебры $\overline{\mathfrak{H}}(\mathfrak{G}')$ в алгебру $\overline{\mathfrak{H}}(\mathfrak{G})$. Изучение этих гомоморфизмов и составляет предмет настоящей работы.

Гомоморфизм F определяется своими значениями на $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$, а гомоморфизм F^* своими значениями на $\overline{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G}')$. При этом $F(\mathfrak{P}(\mathfrak{G}))\subset\mathfrak{P}(\mathfrak{G}')$, $F^*(\overline{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G}'))\subset\overline{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G})$. В [3] для всех классических групп $\mathfrak{G}$ построены канонические базисы пространств $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$. Они обозначаются: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ для $U(n)$; $\Sigma_2, \Sigma_4, \ldots, \Sigma_{2n}$ для $O(2n+1)$; $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_{2(n-1)}, \Omega_n$ для $O(2n)$; $T_2, T_4, \ldots, T_{2n}$ для $Sp(2n)$ (в этих обозначениях индекс k связан с размерностью m соответствующего элемента формулой $m=2k-1$).

§ 2. Отображения $\xi\to\hat{\xi}$ и $x\to\check{x}$. Пусть G — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$ и H — ее максимальная коммутативная подалгебра. Внутренние автоморфизмы G, переводящие в себя H, индуцируют на H и на сопряженном к H пространстве $\overline{H}$ некоторые конечные группы линейных преобразований S и S^*. Обозначим через $\overline{\mathfrak{S}}(H)$ совокупность всех многочленов на H, инвариантных относительно S, и через $\mathfrak{S}(H)$ совокупность всех многочленов на $\overline{H}$, инвариантных относительно S^*. Построим линейное отображение $\xi\to\hat{\xi}$ пространства $\overline{\mathfrak{S}}(H)$ в $\overline{\mathfrak{H}}(\mathfrak{G})$ и линейное отображение $x\to\check{x}$ пространства $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ в $\mathfrak{S}(H)$.

Пусть $\overline{G}$ — пространство, сопряженное G; $\mathfrak{G}_0$ — группа всех внутренних автоморфизмов алгебры G; $\mathfrak{G}_0^*$ — индуцированная группа линейных преобразований $\overline{G}$. В качестве промежуточного образования

---

* Настоящая заметка содержит дальнейшее развитие результатов, опубликованных в [1-3].

рассмотрим совокупность $\overline{\mathfrak{S}}(G)$ всех многочленов на G, инвариантных относительно $\mathfrak{G}_0$, и совокупность $\mathfrak{S}(G)$ всех многочленов на $\overline{G}$, инвариантных относительно $\mathfrak{G}_0^*$. Имеем $\overline{\mathfrak{S}}(G) = \Sigma\overline{\mathfrak{S}}^k(G)$, $\mathfrak{S}(G) = \Sigma\mathfrak{S}^k(G)$, где $\overline{\mathfrak{S}}^k(G)$ и $\mathfrak{S}^k(G)$ — совокупности однородных многочленов степени k. Элементы $\overline{\mathfrak{S}}^k(G)$ ($\mathfrak{S}^k(G)$) находятся во взаимно-однозначном соответствии с симметрическими инвариантными k раз ковариантными (соответственно, k раз контравариантными) тензорами на алгебре G. Относительно скалярного произведения, определяемого сверткой тензоров, $\overline{\mathfrak{S}}^k(G)$ и $\mathfrak{S}^k(G)$ образуют пару сопряженных пространств.

Каждому элементу $\eta \in \overline{\mathfrak{S}}^k(G)$ сопоставляется инвариантный кососимметрический $2k-1$ раз ковариантный тензор $a_{i_1 \ldots i_{2k-1}}$ (см. (2)). Этот тензор задает на G полилинейную форму η', которой соответствует однозначно определенная инвариантная дифференциальная форма η'' на границе $\mathfrak{G}$. Формула $\theta(\eta) = \frac{[(k-1)!]^2}{2^{k-1}}\eta''$ определяет линейное отображение θ пространства $\overline{\mathfrak{S}}(G)$ в пространство $\mathfrak{H}(G)$. Доказывается, что $\theta(\overline{\mathfrak{S}}(G)) = \mathfrak{P}(\mathfrak{G})$. Сопряженное отображение θ^* отображает $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ в $\mathfrak{S}(G)$.

Каждый многочлен из $\overline{\mathfrak{S}}(H)$ распространяется и притом единственным образом в многочлен из $\overline{\mathfrak{S}}(G)$. Этим определяется линейное отображение β $\overline{\mathfrak{S}}(H)$ на $\overline{\mathfrak{S}}(G)$. Для каждого $\xi \in \overline{\mathfrak{S}}(H)$ положим $\hat{\xi} = \theta\beta(\xi)$.

Далее, рассмотрим подпространство R алгебры G, определяемое условиями $G = H \dotplus R$, $H \circ R \subset R$ (знак $\circ$ обозначает умножение в алгебре G). Ортогональное дополнение R в пространстве $\overline{G}$ естественно отождествляется с $\overline{H}$. Каждый многочлен из $\mathfrak{S}(G)$ естественно индуцирует многочлен из $\mathfrak{S}(H)$. Этим определяется некоторое отображение γ $\mathfrak{S}(G)$ на $\mathfrak{S}(H)$. Для каждого $x \in \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ положим $\check{x} = \theta^*\beta(x)$.

§ 3. Интегралы инвариантных дифференциальных форм по примитивным циклам классических групп.

Теорема 1. *Пусть ξ — инвариантная дифференциальная форма степени $2k-1$ на группе $U(n)$, $\mathring{\xi}$ — полилинейная форма, индуцированная ξ на алгебре Ли группы $U(n)$. Тогда*

$$\int_{P_k} \xi = \frac{(2\pi i)^k (2k-2)!}{[(k-1)!]^3}\mathring{\xi}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, \ldots, E_{1k}, E_{k1})$$

(E_{jl} обозначает матрицу, у которой на пересечении j-й строки и l-го столбца стоит 1, *а все остальные элементы равны нулю)**.

Теорема 2. *Пусть ξ — инвариантная дифференциальная форма степени $2n-1$ на группе $O(2n)$, $\mathring{\xi}$ — соответствующая полилинейная форма на алгебре Ли группы $O(2n)$. Тогда*

$$\int_{\Omega_n} \xi = \frac{(4\pi)^n}{2(n-1)!}\mathring{\xi}(F_{12}, F_{13}, \ldots, F_{1,2n}),$$

где $F_{jl} = E_{jl} - E_{lj}$.

---

* Матрицы E_{jl} не входят в алгебру Ли группы $U(n)$, но входят в ее комплексную оболочку. Форма $\mathring{\xi}$ естественно распространяется на эту оболочку, и под значением $\mathring{\xi}(E_{11}, \ldots, E_{k1})$ следует понимать значение этой продолженной формы.

Используя эти теоремы, можно построить базисы пространств $\overline{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G})$, дуальные каноническим базисам пространств $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$, перечисленным в § 1.

§ 4. Гомологические характеристики унитарных представлений. Среди гомоморфизмов компактных групп Ли особое значение имеют гомоморфизмы в унитарную группу $U(n)$. К рассмотрению этого специального случая можно свести вычисление гомологических характеристик любых гомоморфизмов компактных групп Ли. Исследование гомоморфизмов группы $\mathfrak{G}$ в группу $U(n)$, другими словами, исследование унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$ легко сводится к исследованию неприводимых представлений.

Теорема 3. *Пусть $x \in \overline{\mathfrak{P}}^{2k-1}(\mathfrak{G})$. Для всякого неприводимого представления F группы $\mathfrak{G}$ в группу $U(n)$*

$$F(x) = n\left[\check{x}(\Lambda + \gamma) - \check{x}(\gamma)\right] P_k, \tag{1}$$

где Λ — старший вес представления F, γ — полусумма всех положительных корней группы $\mathfrak{G}$ (Λ и γ суть элементы $\overline{H}$).

§ 5. Вычисление многочленов $\check{x}$. Используя какое-нибудь инвариантное относительно $\mathfrak{G}_0$ скалярное произведение в пространстве G, отождествим $\overline{G}$ с G.

Теорема 4. *Пусть $x \in \overline{\mathfrak{P}}^{2k-1}(\mathfrak{G})$ и пусть $\mathfrak{P}^{2k-1}(\mathfrak{G})$ одномерно. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — положительные корни алгебры G; e_β — ее корневые векторы; $h_1, \ldots, h_r$ — базис максимальной коммутативной подалгебры H; $Q(z_1, \ldots, z_{2k-1})$ — какая-нибудь примитивная кососимметрическая инвариантная форма на алгебре G. Тогда*

$$\check{x}(M) = c \sum_{s=1}^{r} \sum_{j_1, \ldots, j_{k-1}=1}^{l} Q\left(h_s, e_{\beta_{j_1}}, e_{-\beta_{j_1}}, \ldots, e_{\beta_{j_{k-1}}} e_{-\beta_{j_{k-1}}}\right) m_s b_{j_1} \ldots b_{j_{k-1}}, \tag{2}$$

где $m_s = (M, h_s)$, $b_j = (M, \beta_j)$, c — постоянная, не зависящая от M.

Мы ограничились случаем, когда $\mathfrak{P}^{2k-1}(\mathfrak{G})$ одномерно, лишь для экономии места. Заметим, что рассмотренный случай является основным: он имеет место всегда, когда группа $\mathfrak{G}$ является простой; единственное исключение — пространство $\mathfrak{P}^{4k-1}$ для группы $O(4k)$. Наличие в формуле (2) неизвестной постоянной c не является серьезной помехой для ее применения: постоянная c определяется из (1), если известно значение $F(P_k)$ хотя бы для одного представления F.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие. *Если $k = 2$, то $\check{x}(M) = c(M, M)$, где (M', M'') обозначает инвариантное относительно $\mathfrak{G}_0$ скалярное произведение в G.*

В простой алгебре Ли инвариантное скалярное произведение определено однозначно с точностью до постоянного множителя. Нормируем его условием $(\alpha, \alpha) = 2$, где α — наибольший по длине корень алгебры G. Опираясь на теорему 3 и следствие теоремы 4, выводим, что при этой нормировке $F(P_2) = (\Lambda + 2\gamma, \Lambda)\frac{n}{N} P_2$, где N — размерность G.

Поступило
10 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, ДАН, 85, № 4, 697 (1952). [2] Е. Б. Дынкин, ДАН, 87, № 3, 333 (1952). [3] Е. Б. Дынкин, ДАН, 91, № 2 (1953).