Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 5

МАТЕМАТИКА

Р. Э. ВИНОГРАД

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 VI 1953)

В работе автора [1] выяснена с различных точек зрения связь между решениями правильной системы

$$z' = A(t)z \tag{1}$$

и системы с добавками

$$z' = [A(t) + \varepsilon B(t)]z \tag{2}$$

при сколь угодно малом ε и обычных предположениях относительно матриц $A(t)$ и $B(t)$ (ограниченность и непрерывность или кусочная непрерывность коэффициентов).

В работе [1] построен пример таких матриц $A(t)$ и $B(t)$, что система (1) правильна и все ее решения ограничены, но, несмотря на жесткие дополнительные условия

$$|B(t)| \to 0; \quad \int_0^\infty |B(t)|\,dt < \infty, \tag{3}$$

у системы (2) при любом $\varepsilon > 0$ существуют неограниченные решения.

Однако при этом характеристические показатели обеих систем оказались одинаковыми. Попытка избавиться от этого равенства наталкивалась на нерешенную проблему устойчивости характеристических показателей правильных систем вообще.

Последняя проблема имеет отрицательное решение, как показывает нижеследующая теорема. Эта же теорема представляет собой усиление результата, заключавшегося в работе [1].

Теорема. *Существуют такие матрицы* $A(t)$ *и* $B(t)$, *что: их коэффициенты* а) *суть ограниченные голоморфные на полуоси* $0 < t < \infty$ *функции и* б) *обладают слабой вариацией в смысле Персидского* [2]; в) *выполняются условия* $|B(t)| \to 0$ *и* $\int_0^\infty |B(t)|\,dt < \infty$; г) *система* (1) *правильна и имеет отрицательные характеристические показатели, так что все ее решения асимптотически устойчивы*; д) *при любом* $\varepsilon > 0$ *среди решений* (2) *имеются такие, характеристический показатель которых* $\geqslant c_0 > 0$; *в частности, решения* (2) *заведомо неустойчивы.*

Доказательство. Покажем, что всем требованиям теоремы отвечают матрицы

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-6\pi \sin \pi\sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\sqrt{t}} \\ e^{-\sqrt{t}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Условия а) и в), очевидно, соблюдены, а так как производные всех входящих сюда функций стремятся к нулю при $t \to \infty$, то выполнено и б). Из теоремы Ляпунова вытекает г), ибо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t (-1 - 6\pi \sin \pi \sqrt{t})\, dt$$

существует и равен -1, как показывает прямое вычисление интеграла.

Чтобы упростить доказательство д), рассмотрим вместо (2) систему

$$\tilde{z}' = [A(t) + E + \varepsilon B(t)]\, \tilde{z} \tag{2'}$$

и установим для нее существование решений с показателем $\geqslant 2$. Им, очевидно, будут соответствовать в системе (2) решения с показателем $\geqslant 1$ (связь между (2) и (2′) осуществляется преобразованием $z = e^{-t}\tilde{z}$), чем и будет доказано д).

Положив, для краткости,

$$-6\pi \sin \pi \sqrt{t} = f(t), \qquad \varepsilon e^{-\sqrt{t}} = g(t), \tag{4}$$

запишем (2′) в координатной форме

$$\begin{aligned} x' &= \qquad\quad g(t)\, y, \\ y' &= g(t)\, x + f(t)\, y \end{aligned} \tag{2''}$$

и построим по методу Пикара решение (2″) с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Записав (2″) в виде

$$x(t) = 1 + \int_0^t g(\tau)\, y(\tau)\, d\tau, \quad y(t) = \int_0^t g(\tau)\, x(\tau)\, e^{\int_\tau^t f(\xi)\, d\xi}\, d\tau,$$

можно проверить индукцией, что в качестве последовательных приближений получим:

$$\begin{aligned} x_{2n+1}(t) &= x_{2n}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} I_k(t), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ y_{2n}(t) &= y_{2n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} J_k(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где положено ($t_0, t_1, \ldots, t_{2k-1}$ — переменные интегрирования):

$$I_k(t) = \int_0^t \int_0^{t_{2k-1}} \int_0^{t_{2k-2}} \int_0^{t_{2k-3}} \cdots \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} g(t_0)\, g(t_1) \ldots$$

$$\ldots g(t_{2k-1}) \exp\left[\int_{t_0}^{t_1} f(\xi)\, d\xi + \int_{t_2}^{t_3} f\, d\xi + \ldots + \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f\, d\xi\right] dt_0 dt_1 \ldots dt_{2k-1}, \tag{6}$$

$$J_k(t) = \int_0^t \int_0^{t_{2k-2}} \int_0^{t_{2k-3}} \cdots \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} g(t_0)\, g(t_1) \ldots \tag{7}$$

$$\ldots g(t_{2k-2}) \exp\left[\int_{t_0}^{t_1} f\, d\xi + \int_{t_2}^{t_3} f\, d\xi + \ldots + \int_{t_{2k-4}}^{t_{2k-3}} f\, d\xi + \int_{t_{2k-2}}^{t} f\, d\xi\right] dt_0 dt_1 \ldots dt_{2k-2}.$$

Просто доказывается, что приближения (5) сходятся (равномерно на каждом отрезке оси t) к решению системы (2″), которое, следовательно, запишется в виде

$$x(t) = \lim_{i\to\infty} x_i(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(t), \qquad y(t) = \lim_{i\to\infty} y_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_k(t), \tag{8}$$

Согласно (4) и (6) подинтегральное выражение в $I_k(t)$ положительно, откуда $I_k(t) > 0$, а потому, каково бы ни было n,

$$x(t) > I_n(t). \tag{9}$$

Покажем, что характеристический показатель решения (8) при любом $\varepsilon > 0$ остается не менее 2, для чего установим, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln x(t) \geqslant 2. \tag{10}$$

Достаточно доказать (10) для некоторой последовательности $t = T_n \to \infty$; выберем $T_n = (2n+2)^2$.

Рассмотрим интеграл $I_n(t)$ при $t = T_n$. Область интегрирования для $I_n(t)$ согласно (6) есть $2n$-мерный симплекс S_{2n}:

$$0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{2n-1} \leqslant t = T_n, \tag{11}$$

а подинтегральная функция положительна; поэтому интеграл уменьшится, если сузить область интегрирования.

Зададим новую область K_{2n} неравенствами:

$$\begin{aligned} &(2k+1)^2 \leqslant t_{2k-2} \leqslant (2k+1)^2 + 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \\ &(2k+2)^2 - 1 \leqslant t_{2k-1} \leqslant (2k+2)^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь все переменные t_i пробегают отрезки единичной длины, так что K_{2n} есть $2n$-мерный куб с объемом $mK_{2n} = 1$, причем, поскольку неравенства (11) заведомо выполнены, то $K_{2n} \subset S_{2n}$ и, следовательно, интеграл по области K_{2n} меньше интеграла по S_{2n}:

$$I_n(t) = \underset{(S_{2n})}{I_n(t)} > \underset{(K_{2n})}{I_n(t)}. \tag{13}$$

Оценим последний интеграл снизу (его подинтегральная функция выписана полностью в (6)).

Так как $g(t) = \varepsilon e^{-\sqrt{t}}$ и выполнено (11), то

$$g(t_0)\, g(t_1) \ldots g(t_{2n-1}) > [g(T_n)]^{2n} = \varepsilon^{2n} e^{-(2n+2)2n} = \varepsilon^{2n} e^{-4n^2-4n}. \tag{14}$$

Далее, так как $f(\xi) = -6\pi \sin \pi \sqrt{\xi}$ положительно внутри отрезка $(2k+1)^2 \leqslant \xi \leqslant (2k+2)^2$, в котором лежат, согласно (12), t_{2k-2} и t_{2k-1}, то

$$\int\limits_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f(\xi)\, d\xi > \int\limits_{\max t_{2k-2}}^{\min t_{2k-1}} f(\xi) d\xi = -6\pi \int\limits_{(2k+1)^2+1}^{(2k+2)^2-1} \sin \pi \sqrt{\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{12}{\pi} \left(\pi \sqrt{\xi} \cos \pi \sqrt{\xi} - \sin \pi \sqrt{\xi}\right) \Big|_{(2k+1)^2+1}^{(2k+2)^2-1}. \tag{15}$$

Положим $\sqrt{(2k+2)^2-1}=2k+2-\alpha_k$, $\sqrt{(2k+1)^2+1}=2k+1+\beta_k$. В силу очевидных неравенств $\sqrt{1-z}>1-z$ $(0<z<1)$ и $\sqrt{1+z}<1+\frac{1}{2}z$ $(z>0)$, найдем для $k=1, 2, \ldots$:

$$0<\alpha_k<(2k+2)\left[1-\sqrt{1-\frac{1}{(2k+2)^2}}\right]<\frac{1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{4};$$

$$0<\beta_k<(2k+1)\left[\sqrt{1+\frac{1}{(2k+1)^2}}-1\right]<\frac{1}{2(2k+1)}<\frac{1}{4},$$

так что

$$\cos\pi\sqrt{(2k+2)^2-1}=\cos\pi(2k+2-\alpha_k)=\cos\pi\alpha_k\geqslant\cos\frac{\pi}{4}>\frac{1}{2};$$

$$-\cos\pi\sqrt{(2k+1)^2+1}=-\cos\pi(2k+1+\beta_k)=\cos\pi\beta_k>\cos\frac{\pi}{4}>\frac{1}{2}.$$

Используя последние неравенства и заменяя синусы единицами, легко обнаружим, что правая часть (15) не менее, чем

$$\frac{12}{\pi}\left[\pi(2k+2-\alpha_k)\frac{1}{2}+\pi(2k+1+\beta_k)\frac{1}{2}-2\right]>6\left(4k+3-\alpha_k+\beta_k-\frac{4}{\pi}\right)>$$
$$>6\left[4k+3-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{4}{\pi}\right]>24k.$$

Окончательно $\int\limits_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f(\xi)\,d\xi>24\,k$, откуда

$$\exp\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f(\xi)\,d\xi>\exp 24\sum_{h=1}^{n}k=e^{12n^2+12n}. \tag{16}$$

Принимая во внимание (6), (13), (14) и (16), получаем при выбранном $t=T_n=(2n+2)^2$

$$I_n(t)>\underset{(K_{2n})}{I_n}(t)>\int\limits_{(K_{2n})}\varepsilon^{2n}e^{-4n^2-4}e^{12n^2+12n}\,dK=\varepsilon^{2n}e^{8n^2+8n}\,mK_{2n}=\varepsilon^{2n}e^{8n^2+8n}.$$

В таком случае неравенство (9) дает

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{T_n}\ln x(T_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\varepsilon^{2n}e^{8n^2+8n}}{(2n+2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+8n+2n\ln\varepsilon}{4n^2+8n+4}=2,$$

чем и заканчивается доказательство.

Отметим еще, что кратность характеристических показателей системы (1) (оба показателя равны —1) не играет никакой роли: ценой небольших изменений конструкции ту же теорему можно доказать для случая различных показателей.

Поступило
20 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Э. Виноград, Усп. матем. наук, 8, в. 1 (53) (1953). [2] К. П. Персидский, Изв. АН КазССР, в. 1 (1947).