Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 5

МАТЕМАТИКА

П. П. БЕЛИНСКИЙ

ОБ ИСКАЖЕНИИ ПРИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 23 V 1953)

Квазиконформное отображение [1] называется q-квазиконформным, если характеристика $p(z) \leqslant q = \text{const}$.

Теорема 1. *Пусть функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, q-квазиконформно отображает круг $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$. Тогда*

$$|f(re^{i\varphi})| \leqslant \rho(r, q), \tag{1}$$

где $\rho = \rho(r, q)$ однозначно определяется из соотношения

$$\frac{K'(\rho)}{K(\rho)} = \frac{1}{q}\frac{K'(r)}{K(r)}, \tag{2}$$

в котором $K(r)$ и $K'(r)$, соответственно, обозначают полные эллиптические интегралы первого рода от модулей $k = r$ и $k' = \sqrt{1 - r^2}$. Функция, для которой в (1) достигается равенство, существенно зависит от r и q и определяется по ним однозначно с точностью до поворотов в плоскостях z и w.

Доказательство проводится указанием экстремальной функции, которую можно представить в виде суперпозиции следующих трех отображений: 1) конформного отображения круга $|z| \leqslant 1$ с радиальным разрезом от 0 до r на кольцо $r^* \leqslant |\zeta| \leqslant 1$; 2) q-квазиконформного отображения кольца $r^* \leqslant |\zeta| \leqslant 1$ на кольцо $(r^*)^{1/q} \leqslant |\omega| \leqslant 1$ ($|\omega| = |\zeta|^{1/q}$, $\arg\omega = \arg\zeta$); 3) конформного отображения кольца в плоскости ω на круг $|w| \leqslant 1$ с разрезом от 0 до ρ. Между r и ρ получается соотношение (2). Свойство экстремальности указанной функции при $z = r$ и ее единственность следуют из двух теорем Гретша [2,3].

Теорема 2. *Пусть функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, q-квазиконформно отображает круг $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$, причем некоторая граничная дуга окружности $|z| = 1$ длины φ переходит в дугу окружности $|w| = 1$ длины $\tilde{\varphi}$. Тогда*

$$\tilde{\varphi} \leqslant \psi(\varphi, q), \tag{3}$$

где $\psi = \psi(\varphi, q)$ однозначно определяется из соотношения

$$\frac{K'\left(\sin\frac{\psi}{4}\right)}{K\left(\sin\frac{\psi}{4}\right)} = \frac{1}{q}\frac{K'\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)}{K\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)}. \tag{4}$$

При заданном q экстремальная функция существенно зависит от φ (равенство не может достигаться сразу для двух различных дуг) и определяется однозначно с точностью до поворотов в плоскостях z и w.

Для доказательства продолжаем отображение на всю плоскость z по принципу симметрии и проводим разрез по дуге φ. Тогда внешность дуги φ отображается q-квазиконформно на внешность дуги $\tilde{\varphi}$, причем $w(0) = 0$, $w(\infty) = \infty$. Отображая конформно обе указанные области внутрь единичных кругов $|\zeta| \leqslant 1$ и $|\omega| \leqslant 1$ так, что $\zeta(0) = 0$, $\omega(0) = 0$, $\zeta(\infty) > 0$, $\omega(\infty) > 0$, найдем, что $\zeta(\infty) = \sin\frac{\varphi}{4}$, $\omega(\infty) = \sin\frac{\tilde{\varphi}}{4}$, откуда получим из теоремы 1 соотношение (3). Экстремальная функция теоремы 2 получается из экстремальной функции теоремы 1.

Следующая теорема дает количественную оценку для функции $\lambda(\varepsilon)$ из леммы 3 статьи [1].

Теорема 3. *Пусть функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, q-квазиконформно отображает круг $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ и $q = 1 + \varepsilon$; тогда*

$$|f(z) - z| < 18 \ln q < 18\varepsilon. \tag{5}$$

Для доказательства логарифмируем соотношения (2) и (4) и применяем к ним формулу конечных приращений. Тогда

$$(\rho - r)\frac{d}{dr}\ln\frac{K'(r)}{K(r)}\bigg|_{r=r+\theta(\rho-r)} = \ln\frac{1}{q},$$

$$(\psi - \varphi)\frac{d}{d\varphi}\ln\frac{K'\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)}{K\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)}\Bigg|_{\varphi=\varphi+\theta(\psi-\varphi)} = \ln\frac{1}{q},$$

и, если обозначить через $1/\mu_1$ и $1/\mu_2$, соответственно,

$$\min\left|\frac{d}{dr}\ln\frac{K'(r)}{K(r)}\right| \quad \text{и} \quad \min\left|\frac{d}{d\varphi}\ln\frac{K'\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)}{K\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)}\right|,$$

то из предыдущих равенств получим соотношения

$$||f(z)| - |z|| \leqslant \rho - r < \mu_1 \ln q < 0{,}9 \ln q < 0{,}9\varepsilon, \tag{6}$$

$$|f(z) - z|_{|z|=1} < \psi - \varphi < \mu_2 \ln q < 4{,}5 \ln q < 4{,}5\varepsilon. \tag{7}$$

Дальнейшее доказательство проводится по следующей схеме. Используя прием М. А. Лаврентьева [1], продолжаем отображение по принципу симметрии на круг $|z| \leqslant 2$ и, соответственно, в плоскости w на область, близкую к кругу радиуса 2 (на первом этапе доказательства ε считается достаточно малым). Полученные области вновь переводятся в единичные круги, нуль в нуль. Первоначально интересующие нас круги $|z| \leqslant 1$ и $|w| \leqslant 1$ переходят при этом соответствии в круг $|z| \leqslant 1/2$ и область, близкую кругу $|w| \leqslant 1/2$. Из общих свойств конформных отображений (см. [4], лемма 3) и (7) следует, что величина $|w - z|$ при $|z| = 1/2$ будет порядка ε, а вводя в единичном круге неевклидовы расстояния и формулируя (6) в инвариантной форме (расстояния могут измениться лишь на величину порядка ε), получаем для достаточно малого ε соотношение

$$|f(z) - z| < 18\varepsilon = 18(q - 1). \tag{8}$$

Для общего случая доказательство следует из того факта, что произвольное q-квазиконформное отображение можно приблизить с любой степенью точности отображением, которое является суперпозицией n $\sqrt[n]{q}$-квазиконформных. Поэтому из (8) следует

$$|f(z) - z| < 18n\left(\sqrt[n]{q} - 1\right), \tag{9}$$

где n настолько велико, что $\sqrt[n]{q} - 1$ достаточно мало. Переходя к пределу в (9) при $n \to \infty$, получаем доказательство теоремы.

Поступило
21 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев, Матем. сборн., 42, № 4, 407 (1935). [2] H. Grötzsch, Ber. Sachs. Acad. Wiss., **80**, 503 (1928). [3] H. Grötzsch, ibid., **80**, 367 (1928). [4] S. E. Warschawsky, Trans. Am. Math. Soc., **69** (1950).