Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Л. ХЕЙН

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА К СКВАЖИНЕ С ОТКРЫТЫМ ЗАБОЕМ, НЕПОЛНОСТЬЮ ВСКРЫВАЮЩЕЙ ПЛАСТ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 15 V 1953)

Пусть неограниченный по простиранию горизонтальный пласт мощностью h вскрывается на глубину b скважиной с открытым забоем радиуса r_c. Пласт изотропен, однороден по мощности, с непроницаемыми кровлей и подошвой и заполнен однородной сжимаемой пластовой жидкостью (нефть, вода, газ) с постоянной вязкостью μ и постоянной начальной плотностью ($\rho_н$).

Нужно найти формулу, дающую зависимость между давлением и приведенным к нормальным условиям постоянным дебитом жидкости на забое скважины при упругой фильтрации жидкости по закону Дарси.

Зададимся цилиндрической системой координат. Направим ось z по оси скважины. За положительное направление оси z примем направление от кровли к подошве пласта. Начало координат на кровле пласта.

§ 1. Случай фильтрации капельно-сжимаемой жидкости. Вследствие круговой симметрии рассматриваемой задачи общее дифференциальное уравнение фильтрации запишется в форме:

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность жидкости; r — расстояние от оси скважины до произвольной точки пласта; $\varkappa=\frac{kK_ж}{m\mu}$ — коэффициент пьезопроводности, где k — проницаемость, $K_ж$ — модуль упругости жидкости, m — пористость, μ — динамическая вязкость жидкости.

Выпишем начальные и граничные условия:

$$\rho=\rho_н \quad \text{при } t=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=0 \text{ при } z=0; \quad \frac{\partial\rho}{\partial z}=0 \text{ при } z=h; \tag{3}$$

$$\rho=\rho(t) \quad \text{при } t>0, \quad r=r_c, \quad 0\leqslant z\leqslant b; \tag{4}$$

Уравнение (1) совпадает по форме с уравнением теплопроводности. Проведем интегрирование методом стоков. По аналогии с тепловым источником распределение плотности, вызываемое точечным стоком с массовой интенсивностью $g(t)$ в неограниченной среде, дается формулой:

$$\rho=\frac{1}{(2\sqrt{\pi\varkappa})^3}\int_0^t g(t')\,\frac{\exp\left(-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right)}{(t-t')^{3/2}}\,dt', \tag{5}$$

где R — расстояние от стока до рассматриваемой точки среды, t — время от начала действия стока.

Располагаем по оси скважины линейный сток длиной b. Координату z линейного элемента этого стока для удобства обозначим λ. Для удовлетворения краевых условий на кровле и подошве пласта воспользуемся методом изображений. Отображением линейного элемента стока длиной $d\lambda$ с координатой λ в плоскости $z=0$ будет элементарный линейный сток с координатой $z=-\lambda$, а отражением в плоскости $z=h$ — элементарный линейный сток с координатой $z=2h-\lambda$.

Продолжая подобные отражения бесконечное число раз, получим две бесконечные последовательности изображений, местоположение которых на оси $r=0$ определяется для одной последовательности по закону $z_n=-\lambda+2nh$ и для другой $z_n=\lambda+2nh$, где n принимает целые значения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Обозначим линейную плотность интенсивности через $g(\lambda, t)$. Учитывая, что $R^2=(z\pm\lambda-2nh)^2+r^2$ и заменяя в (5) интенсивность точечного стока интенсивностью элемента стока длиной $d\lambda$, равной $g(\lambda; t)\,d\lambda$, пользуясь принципом суперпозиции полей и известным в теории теплопроводности соотношением

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x+2na)^2}{b}\right]=\frac{(\pi b)^{1/2}}{2a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{a}x\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 b}{4a^2}\right)\right],$$

получим

$$\rho=\rho_{\text{н}}+\frac{1}{4\pi\varkappa h}\int_0^b d\lambda\int_0^t\frac{g(\lambda; t')}{t-t'}\exp\left(-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t')}\right)\times$$

$$\times\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{n^2\pi^2\varkappa(t-t')}{h^2}\right]\left[\cos\frac{n\pi}{h}(z+\lambda)+\cos\frac{n\pi}{h}(z-\lambda)\right]\right\}dt'. \qquad (6)$$

Мы рассмотрим здесь приток при постоянном массовом отборе жидкости из скважины и положим плотность интенсивности независимой от λ и t. Тогда, выполняя интегрирование в (6) по λ и вводя новую переменную $\tau^2=\frac{1}{t-t'}$, получим:

$$\rho=\rho_{\text{н}}+\frac{gb}{2\pi\varkappa h}\int_{1/\sqrt{t}}^{\infty}\exp\left(-\frac{r^2}{4\varkappa}\tau^2\right)\frac{d\tau}{\tau}+$$

$$+\frac{g}{\pi^2\varkappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{h}z\sin\frac{n\pi}{h}b\int_{1/\sqrt{t}}^{\infty}\exp\left(-\frac{r^2\tau^2}{4\varkappa}-\frac{n^2\pi^2\varkappa}{h^2\tau^2}\right)\frac{d\tau}{\tau}. \qquad (7)$$

Массовый дебит линейного стока

$$G=\lim_{r\to 0}\int_0^h 2\pi r\rho v_r\,dz, \qquad (8)$$

где v_r — радиальная скорость фильтрации.

Учитывая, что $\rho v_r=-\frac{kK_{\text{ж}}}{m\mu}\frac{\partial\rho}{\partial r}$ и находя $\partial\rho/\partial r$ дифференцированием (7) по r, получим согласно (8)

$$g=\frac{G}{bm}. \qquad (9)$$

В реальной скважине плотность постоянна вдоль стенки скважины, тогда как согласно (7) плотность переменна вдоль части цилиндрической поверхности $r=r_c$, $0\leqslant z\leqslant b$, которую мы назовем «забойной поверхностью». Локальное значение плотности на этой поверхности на расстоянии $^3/_4$ интервала от кровли пласта до нижнего ее края назовем «средне-эффективным». Постоянство плотности на «забойной поверхности» в рассматриваемой нами схеме может быть достигнуто соответствующим подбором интенсивностей элементов линейного стока (без изменения его суммарного дебита).

Для стационарного случая показано [3], что достигаемое таким путем постоянное (вдоль «забойной» поверхности) значение потенциальной функции совпадает со средне-эффективным ее значением, отвечающим случаю одинаковой интенсивности элементов стока.

Так как массовый дебит в пределах узкой области призабойной зоны практически очень быстро стабилизируется, то можно считать, что в каждый момент времени в пределах этой зоны распределение плотности отвечает стационарному течению, так что можно оперировать средне-эффективной плотностью. Полагая на этом основании в (7) $z = 0{,}75\,b$, учитывая, что для жидкости, подчиняющейся закону Гука, $\rho = \rho_0 + \rho_0 \frac{p - p_0}{K_ж}$ и что $\frac{G}{\rho_0} = Q_0$, где p_0 — атмосферное давление, ρ_0 — соответствующая плотность, Q_0 — приведенный к этому давлению объем флюида, и пользуясь известным в теории цилиндрических функций выражением

$$K_0(z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y + \frac{z^2}{y}\right)\right]\frac{dy}{y},$$

где $K_0(z)$ — функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента, получаем после ряда простых преобразований окончательную формулу для давления на забое p_c:

$$p_c = p_н - \frac{Q_0\mu}{4\pi k h}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_c^2}{4\varkappa t}\right)\right] - \frac{Q_0\mu}{\pi^2 b k}\left[\varphi(\bar\rho_c, \bar h) - \frac{1}{2}\varphi_\alpha(\bar\rho_c, \bar h, \alpha)\right], \tag{10}$$

где $\bar\rho_c = \frac{r_c}{h}$, $\bar h = \frac{b}{h}$, $\alpha = \frac{r_c^2}{2\varkappa t}$, $p_н$ — начальное давление в пласте.

$$\varphi(\bar\rho_c, \bar h) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_0(n\pi\bar\rho_c)\cos 0{,}75\,n\pi\bar h \sin n\pi\bar h; \tag{11}$$

$$\varphi_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos 0{,}75\,n\pi\bar h \sin n\pi\bar h\int\limits_0^\alpha \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y + \frac{n^2\pi^2\bar\rho_c^2}{y}\right)\right]\frac{dy}{y}. \tag{12}$$

Функции φ и φ_α нами протабулированы в пределах практически встречающихся значений переменных [4].

§ 2. Случай фильтрации газа. Обозначим через P функцию Лейбензона, определяемую выражением

$$P = \int\limits_0^p \rho\, dp, \tag{13}$$

где p — давление и ρ — плотность газа.

Аппроксимируя уравнение состояния идеального газа уравнением

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{p - p_0}{\beta}\right), \tag{14}$$

где β — постоянная, определяемая значениями p на границах интервала аппроксимации, И. А. Чарный [2] линеаризует уравнение Лейбензона для фильтрации газа, приводя его к виду:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \bar\varkappa \nabla^2 P; \tag{15}$$

здесь $\bar\varkappa = \frac{k\beta}{m\mu}$.

Граничные условия для функции P совпадают по форме с начальными и граничными условиями (2), (3), (4) для жидкости. В силу этого и решения уравнения (15) для P будут аналогичны решениям уравнения (1) для ρ.

Аналогом уравнения (7) является уравнение

$$P = P_{\text{н}} + \frac{gb}{2\pi\varkappa h}\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2\tau^2}{4\varkappa}\right)\frac{d\tau}{\tau} +$$

$$+ \frac{g}{\pi^2\varkappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{h}z\sin\frac{n\pi}{h}b\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{\infty}\exp\left(-\frac{r^2\tau^2}{4\varkappa} - \frac{n^2\pi^2r^2\varkappa}{h^2\tau^2}\right)\frac{d\tau}{\tau}. \qquad (16)$$

Повторяя ход рассуждений предыдущего параграфа, учитывая при этом, что, согласно (13) и (14):

$$P_{\text{c}} = \rho_{\text{н}}\beta\exp\left(-\frac{p_{\text{н}}}{\beta}\right)\left[\exp\left(\frac{p_{\text{c}}}{\beta}\right) - 1\right]; \quad P_{\text{н}} = \rho_{\text{н}}\beta\exp\left(-\frac{p_{\text{н}}}{\beta}\right)\left[\exp\left(\frac{p_{\text{н}}}{\beta}\right) - 1\right]$$

и что $\frac{G}{\rho_{\text{н}}} = Q_0\frac{p_0}{p_{\text{н}}}$, пользуясь принятыми в § 1 обозначениями, получим из (16) следующую окончательную формулу для p_{c}:

$$p_{\text{c}} = p_{\text{н}} + \beta\ln\left\{1 - \frac{Q_0\mu p_0}{4\beta\pi khp_{\text{н}}}\left[-\operatorname{Ei}\left(-\frac{r_{\text{c}}^2}{4\varkappa t}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{Q_0\mu p_0}{\pi^2\beta kbp_{\text{н}}}\left[\varphi(\bar{\rho}_{\text{c}}, \bar{h}) - \frac{1}{2}\varphi_{\alpha}(\bar{\rho}_{\text{c}}, \bar{h}, \alpha)\right]\right]\right\}. \qquad (17)$$

Формулы (10) и (17) могут быть использованы для определения проницаемости и пьезопроводности пласта по данным испытания скважин. Определение производится методом наложения опытной кривой падения давления на забое скважины на отвечающие разным значениям проницаемости и пьезопроводности теоретические кривые.

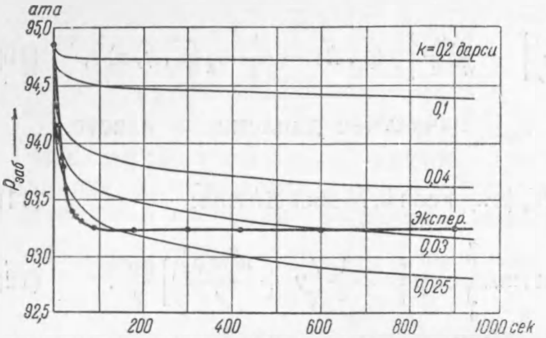

Рис. 1. Опытная кривая и теоретические кривые падения давления на забое газовой скважины при $Q = 524{,}0$ тыс. м^3 / сутки = const

В том случае, когда линейный закон фильтрации в призабойной зоне пласта нарушается, определять параметры пласта по принципу наложения теоретической и опытной кривых нельзя. Можно считать, что нарушение линейного режима фильтрации в призабойной зоне пласта мало отражается на периоде стабилизации давления на забое скважины. Поэтому для определения параметров пласта могут быть использованы формулы, выведенные на основе линейной теории фильтрации. В этом случае только сопоставление теоретической и опытной кривых падения давления на забое скважины следует производить по принципу наложения периодов стабилизации.

На рис. 1 приводится построенная на основе формулы (17) сетка теоретических кривых падения давления на забое одной из испытывавшихся нами газовых скважин. Кривые отвечают разным значениям проницаемости. Приводимая на фигуре опытная кривая получена при проведении испытания этой скважины на нелинейном режиме фильтрации газа в призабойной зоне пласта. Теоретическая кривая $k = 0{,}2$ дарси отвечает опытному значению периода стабилизации.

Всесоюзный научно-исследовательский институт природных газов

Поступило 24 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, 1947. [2] И. А. Чарный, АН СССР, ОТН, № 6 (1951). [3] М. Маскет, Движение однородных флюидов в пористой среде, 1937. [4] А. Л. Хейн, Тр. ВНИИГАЗ'а, М., 1953.