Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

ГЕОФИЗИКА

Д. Н. БИБИКОВ

К ПОСТАНОВКЕ ВОПРОСА О ЛЕДОВОМ РЕЖИМЕ НЕЗАМЕРЗАЮЩИХ ВОДНЫХ ПОТОКОВ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 5 VI 1953)

Ледовые процессы, происходящие в незамерзающем открытом водном потоке, протекают следующим образом. В каком то сечении температура воды под действием теплоотдачи с зеркала достигает 0° и затем несколько понижается. По достижении переохлаждения воды в первую очередь на поверхности потока, а затем внутри него появляются мельчайшие кристаллы льда, число которых с течением времени возрастает. Появившиеся кристаллы не исчезают и вследствие турбулентного перемешивания переносятся по всей глубине потока. В процессе этого перемещения кристаллы льда, распределенные на различных глубинах потока, приобретают неодинаковую скорость роста и получают, следовательно, разную гидравлическую крупность. Скорость появления новых кристаллов, а также скорость их роста являются функциями многих переменных, к числу которых относятся температура воды, интенсивность ее перемешивания и др.

По прошествии некоторого времени часть шуги вследствие увеличения гидравлической крупности кристаллов всплывает на поверхность, где, смерзаясь между собой, образует так называемые шуговые ковры или облака.

Оставшиеся внутри потока кристаллы льда переносятся вниз по течению, причем в ходе этого переноса происходит непрерывное перераспределение кристаллов по глубине, характер которого будет зависеть от скорости течения и гидравлической крупности частиц льда. При наличии соответствующих условий на дне потока формируется донный лед, который, находясь под действием переохлажденной воды, начинает интенсивно расти.

Попытаемся дать математическую формулировку рассматриваемого явления применительно к плоско-параллельному потоку. Начало координат располагаем на дне потока и ориентируем ось x по направлению движения воды, z — кверху. Тогда, составляя уравнение материального баланса льда, заключенного в пределах элементарного параллелепипеда, выделенного из потока, получим следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(n_i w_i)}{\partial\tau}=w_0\frac{\partial n_0}{\partial\tau}+v(z)\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(n_i w_i)}{\partial x}+A_x(z)\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2(n_i w_i)}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[A_z(z)\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(n_i w_i)}{\partial z}+\sum_{i=1}^{k}u_i n_i w_i\right], \qquad (1)$$

где w_0 — объем одного из вновь появившихся кристаллов; n_0 — число кристаллов, зародившихся в единице объема; n_i — число частиц льда

i-й фракции, заключенных в единице объема; $A_x(z)$ и $A_z(z)$ — коэффициенты виртуальной вязкости, зависящие от координаты z; w_i—объем частицы льда i-й фракции; $v(z)$ — скорость перемещения воды по направлению x; τ — время; u_i — гидравлическая крупность частицы льда.

Величины w и n зависят от температуры воды в потоке; температура же воды зависит в свою очередь от этих же величин и от глубины потока; таким образом, мы должны для решения задачи иметь уравнение, позволяющее найти температуру воды как функцию w, n, z. Для получения этого уравнения возвратимся к нашему элементарному отсеку, для которого составим уравнение теплового баланса.

В результате будем иметь:

$$c\gamma v(z)\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta_x(z)\frac{\partial t}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\eta_z(z)\frac{\partial t}{\partial z}\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\gamma_л\rho\frac{\partial}{\partial\tau}(n_i w_i)+\frac{\gamma v(z)J}{P}=c\gamma\frac{\partial t}{\partial\tau}. \qquad (2)$$

Здесь c — теплоемкость воды; $\gamma_л$ — удельный вес льда; $\eta_x(z)$ и $\eta_z(z)$ — коэффициенты турбулентной теплопроводности; t — температура воды; ρ — скрытая теплота ледообразования; J — уклон потока; P — механический эквивалент тепла.

Таким образом, мы получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных с переменными коэффициентами.

Краевыми условиями решения поставленной задачи являются: при $\tau=0$ и $x=0$

$$\sum_{i=1}^{k}n_i w_i=\sum_{i=1}^{k}f_i(z,0);\quad t=f_0(z,x). \qquad (3)$$

Обозначая: h — глубина потока; δ — толщина донного льда; t_0 — температура на границе донный лед — вода; $S_л$ — количество тепла, которое идет на образование донного льда; $S_{гр}$ — количество тепла, поступающее от ложа к воде; λ — коэффициент теплопроводности грунта; ϑ — температура грунта, имеем при $z=\delta$:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(n_i w_i)}{\partial z}\bigg|_{z=\delta}=0, \qquad (4)$$

$$t=t_0=0,\quad S_л=-\eta_z(z)\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=\delta}. \qquad (5)$$

Условие (5) существует при наличии донного льда, в случае отсутствия льда на дне граничное условие запишется в виде:

$$S_{гр}=-\lambda\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=0}. \qquad (6)$$

При $z=h$, когда на зеркале потока отсутствуют всплывшие шуговые образования:

$$\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\frac{S(\tau)}{\eta}\bigg|_{z=h}. \qquad (7)$$

Здесь $S(\tau)$ — величина теплоотдачи с зеркала водотока.

Когда имеет место всплывание на поверхность частиц шуги, которые не увлекаются затем на глубину потока, граничное условие принимает вид:

$$P_{k+1}=\left[\int_0^h\frac{\partial(n_{k+1}w_{k+1})}{\partial\tau}dz\right]1\cdot dx\,d\tau. \qquad (8)$$

Здесь P_{k+1} — количество льда, всплывшего на поверхность, индекс $k+1$ означает фракцию частиц, которые всплывают на поверхность и не увлекаются вниз.

Чтобы система была замкнутой, к нашим уравнениям необходимо добавить уравнение материального баланса для элемента потока глубиной h и площадью зеркала $1 \cdot dx$, уравнение, характеризующее распределение скоростей течения по глубине, а также уравнение, определяющее скорость появления новых кристаллов в потоке. Такими уравнениями будут:

$$\frac{S(\tau)}{\rho\gamma_л} = \int_0^h \frac{\partial(n_{k+1}w_{k+1})}{\partial\tau} dz + \sum_{i=1}^{k} \int_0^h \frac{\partial(n_i w_i)}{\partial\tau} dz + \rho\gamma_л [\eta_z(z)] \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=\delta}; \qquad (9)$$

$$v = f(z); \qquad (10)$$

$$\frac{dn}{d\tau} = \psi[t, v(z)]. \qquad (11)$$

В случае отсутствия донного льда третий член правой части уравнения (9) будет равен нулю. Характер зависимости (11) определяется опытным путем.

Полученная система уравнений с данными краевыми условиями достаточно полно описывает явление и позволяет получить инженерное решение при введении некоторых упрощающих допущений.

Поступило
23 IV 1953