Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

ФИЗИКА

И. М. ЛИФШИЦ и А. М. КОСЕВИЧ

К ТЕОРИИ МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ТОНКИХ СЛОЕВ МЕТАЛЛОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 5 VI 1953)

Изучению периодической зависимости магнитной восприимчивости металлов от магнитного поля при низких температурах посвящено большое число экспериментальных [1] и теоретических [2-9] работ, однако зависимость этого эффекта от размеров образца до сих пор не была рассмотрена удовлетворительно.

В настоящей заметке исследуются магнитные свойства слоя металла конечной толщины. В соответствии с обычно принимаемыми допущениями, последний заменяется электронным газом, помещенным между двумя бесконечно высокими «потенциальными стенками»:

$$U(y)=0,\quad |y|<a;\qquad U(y)=\infty,\quad |y|=a. \tag{1}$$

Полученные формулы позволяют исследовать случай произвольной толщины a, начиная от тонких пленок и кончая массивными образцами.

Для решения задачи вычисляется термодинамический потенциал Ω:

$$\Omega=-kT\sum\ln\left\{1+\exp\frac{1}{kT}(\zeta-\varepsilon(H))\right\}, \tag{2}$$

где суммирование производится по всем возможным состояниям отдельного электрона; ζ — химический потенциал. Зная Ω, можно получить средний магнитный момент $M=-\partial\Omega/\partial H$.

Уровни энергии $\varepsilon(H)$ должны быть найдены из уравнения [2]

$$\chi''+\frac{2m}{\hbar^2}\left\{E-\frac{m}{2}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2(y-y_0)^2-U(y)\right\}\chi=0, \tag{3}$$

$$E=\varepsilon(H)-p_z^2/2m\pm\frac{1}{2}\mu_0H,\quad \mu_0=\frac{|e|\hbar}{m_0c},\quad y_0=-\frac{cp_x}{eH}.$$

Магнитное поле H направлено по оси z в плоскости слоя. Мы будем различать массу m_0, входящую в спиновый магнетон μ_0, и эффективную массу электрона в металле m.

Поле (1) может быть заменено граничными условиями:

$$\chi(a)=\chi(-a)=0. \tag{4}$$

1. Точное решение поставленной задачи представляет большие трудности. Поэтому предварительно для качественного учета влияния ограниченности размеров металла можно выбрать такое потенциальное поле, которое обеспечивает пребывание всех электронов в данной области пространства и вместе с тем позволяет легко выполнить все вычисления до конца. В качестве такого потенциала можно выбрать $U(y)={}^1/_2\,m\omega_0^2y^2$, где ω_0 подбирается из условия $U(a)\equiv{}^1/_2\,m\omega_0^2a^2=\zeta_0$

(ζ_0 — граничная энергия при $T=0$), означающего, что все электроны практически находятся в области $|y|<a$. Используя этот потенциал в (3) и (2), можно получить для Ω при низких температурах следующее выражение *:

$$\Omega=-V\left(\frac{m\zeta}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{\zeta}{4\pi\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{3}+\frac{\pi^2}{3}\tau^2+\frac{1}{4}\left(\eta_0^2-\frac{1}{3}\beta^2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\tau\beta^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos\pi k\frac{\eta_0}{\beta}\sin\frac{2\pi k}{\beta}}{k^2\operatorname{sh}\left(2\pi^2k\frac{\tau}{\beta}\right)}\right\}. \qquad (5)$$

Здесь введены безразмерные величины $\tau=kT/\zeta$; $\eta_0=\mu_0H/\zeta$; $\beta=\hbar\omega/\zeta$; $\omega=[\omega_0^2+(eH/mc)^2]^{1/2}$; V — объем.

Магнитный момент в предельном случае $\beta_0=\hbar\omega_0/\zeta\gg\eta_0$; $\beta_0\gg\eta$ ($\eta=\mu H/\zeta$, $\mu=|e|\hbar/mc$), т. е. для малых размеров a или слабых полей H, имеет вид

$$M=\mu V\left(\frac{m\zeta}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{\eta}{8\pi\sqrt{2}}\left\{\left[\left(\frac{m}{m_0}\right)^2-\frac{1}{3}\right]+\right. \qquad (6)$$

$$\left.+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\frac{2\pi^2k\tau/\beta_0}{\operatorname{sh}(2\pi^2k\tau/\beta_0)}\cos\frac{2\pi k}{\beta_0}\left[1-\left(\frac{\beta_0}{k\pi}-\frac{k\pi}{2}\beta_0+\pi\tau\operatorname{cth}2\pi^2k\frac{\tau}{\beta_0}\right)\operatorname{tg}\frac{2\pi k}{\beta_0}\right]\right\}.$$

Из выражений (5) и (6) видно, что для $\beta_0\gg\eta$ становится существенной зависимость периода изменения магнитного момента M с полем H от размеров металла. Периодические члены в (5) зависят уже от аргумента $\beta=\frac{\hbar}{\zeta}(\omega_0^2+\omega_H^2)^{1/2}$, $\omega_0^2=\frac{2\zeta_0}{ma^2}$, $\omega_H^2=\left(\frac{eH}{mc}\right)^2$, т. е. периодичность существует не только в зависимости от поля H, но и от размеров a.

2. Возвращаясь к решению первоначально сформулированной задачи, мы дадим ее решение для достаточно низких температур и при этом подтвердим качественное совпадение с приведенным выше результатом. Для решения задачи определяем уровни энергии в квази-классическом приближении. Это приближение оправдывается тем, что для наиболее существенных участков энергетического спектра квази-классические уровни оказываются совпадающими с точными уровнями энергии. Условие квантования дается уравнением:

$$\int_{y_1}^{y_2}p\,dy=\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{2m\left[E-\frac{m}{2}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2(y-y_0)^2\right]}\,dy=\pi\hbar(n+\gamma), \qquad (7)$$

где y_1 и y_2 — точки поворота.

Величина $\gamma=\gamma(E, y_0)$ очень слабо зависит от E и y_0 и непрерывно изменяется между $\gamma=1/2$ и $\gamma=1$ **.

Уравнение (7) позволяет получить в неявном виде зависимость E от n и p_x: $E=E_n(p_x)$.

---

* Вычисления с потенциалом вида $U(y)=1/2\,m\omega_0^2y^2$ были проделаны в дипломной работе Б. И. Бирмана.

** Обычно, когда потенциальная энергия является плавной функцией координаты, $\gamma=1/2$. Если одна из точек поворота находится на бесконечно высокой потенциальной стенке, а другая — на плавной кривой потенциальной энергии, то $\gamma=3/4$. Если же обе точки поворота находятся на бесконечно высоких потенциальных стенках, то $\gamma=1$. Поскольку в нашем случае роль потенциальной энергии играет сумма плавной функции и бесконечно высоких потенциальных стенок, то γ оказывается зависящей от E и y_0.

Термодинамический потенциал Ω определяется выражением:

$$\Omega = -kT\frac{L^2}{\hbar^2}\sum_{\text{спин}}\int_{-\infty}^{\infty}dp_x\int_{-\infty}^{\infty}dp_z\sum_{n=0}^{\infty}\ln\Big\{1+$$
$$+\exp\frac{1}{kT}\Big(\zeta - p_z^2/2m - E_n(p_x) \pm \frac{1}{2}\mu_0 H\Big)\Big\}, \qquad (8)$$

где L — размеры образца в направлении осей x и z. Переход от суммирования по n в (8) к интегрированию осуществляется по формуле Пуассона в виде:

$$\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}f(n) = \int_0^{\infty}f(x)\,dx + 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}f(x)\cos 2\pi kx\,dx.$$

Мы будем предполагать, что $\tau \ll 1$, $\eta \ll 1$ и $\eta_0 \ll 1$. Это дает нам возможность при оценке интегралов применять «метод перевала» и получить результаты в виде асимптотического разложения по возрастающим степеням η и τ.

Если считать, что уровни энергии определяются уравнением (7) не только для больших, но и для малых значений n, то после громоздких вычислений получаем для магнитного момента M следующие формулы:

1) $\delta = \frac{m}{2}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2\frac{a^2}{\zeta_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{m\zeta_0}{\hbar^2}\right)a^2\eta^2 > 1.$

$$M = \mu V\left(\frac{m\zeta_0}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left[\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 - \frac{1}{3}\right]\eta -$$
$$-\mu V\left(\frac{m\zeta_0}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{1}{2\pi^3}\eta^{1/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}\frac{2\pi^2 k\tau/\eta}{\operatorname{sh}(2\pi^2 k\tau/\eta)}\sin\left(\frac{2\pi k}{\eta} - 2\pi k\gamma_1 - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\pi k\frac{m}{m_0}\right) +$$
$$+\mu S\left(\frac{m\zeta_0}{\hbar^2}\right)\frac{\sqrt{2}}{\pi^3}\eta^{-1/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}\frac{2\pi^2 k\tau/\eta}{\operatorname{sh}(2\pi^2 k\tau/\eta)}\sin\left(\frac{2\pi k}{\eta} - 2\pi k\gamma_2 - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\pi k\frac{m}{m_0}\right) -$$
$$-\mu S\left(\frac{m\zeta_0}{\hbar^2}\right)A\eta^{-1/3}, \qquad (9)$$

где S — площадь поверхности слоя ($S = L^2$).

$$A = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{1/3}\frac{1}{\pi^2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(5/6)\,\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5/3}}\sin\left(2\pi k\gamma_3 - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\gamma_1 = \gamma(\zeta_0, 0), \quad \gamma_2 = \gamma\left(\zeta_0, a\frac{\sqrt{\delta}-1}{\sqrt{\delta}}\right), \quad \gamma_3 = 3/4.$$

2) $\delta < 1$, однако $\delta \gg \eta$.

$$M = \mu V\left(\frac{m\zeta_0}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^2}\left[\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 - \frac{1}{3}\right]\eta +$$
$$+\mu S\left(\frac{m\zeta_0}{\hbar^2}\right)\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{(1-\delta)^{1/4}(\arcsin\sqrt{\delta} - \sqrt{\delta}\sqrt{1-\delta})}{\delta^{1/4}(\arcsin\sqrt{\delta})^{1/2}}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\frac{4\pi k\frac{\tau}{\eta}\arcsin\sqrt{\delta}}{\operatorname{sh}\left(4\pi k\frac{\tau}{\eta}\arcsin\sqrt{\delta}\right)}\cos\left[\frac{4k}{\eta}(\arcsin\sqrt{\delta} + \sqrt{\delta}\sqrt{1-\delta}) - 2\pi k\gamma_4\right]\times$$
$$\times\cos 2k\frac{m}{m_0}(\arcsin\sqrt{\delta} - \sqrt{\delta}\sqrt{1-\delta}) - \mu S\left(\frac{m\zeta_0}{\hbar^2}\right)A\eta^{-1/3};\ \gamma_4 = \gamma(\zeta_0, 0). \qquad (10)$$

При $m/m_0 = 1$ или $m/m_0 = 0$ и при $\gamma = \mathrm{const} = 1/2$ формула (9) совпадает с выражением для M, полученным Стилом [8].

Однако необходимо заметить следующее. Последний член в (9) и (10) получается за счет уровней энергии, для которых $y_0 > a$ и $n < 1$. Но при таких значениях n квази-классическое уравнение (7) для уровней энергии теряет справедливость. Поэтому для малых значений n необходимо рассмотреть точные уровни энергии.

Точные уровни энергии выражаются через корни функции Эйри и определяются таким образом:

$$\frac{1}{\hbar}\int_{y_1}^{a} p\,dy = (n + {}^3/_4)\,\pi + \frac{\alpha}{n+{}^3/_4} - \frac{\beta}{(n+{}^3/_4)^2} + \frac{\gamma}{(n+{}^3/_4)^3} - \ldots,$$

где α, β, γ — положительные постоянные ([10]).

Используя точные уровни энергии для малых n, мы должны изменить формулу суммирования, выделив в сумме по n (8) несколько первых членов. Численные расчеты с точными уровнями энергии показывают, что коэффициент A в последнем члене (9) и (10) равен нулю. Следовательно, в выражениях для M последний член, представляющий собой знакопостоянный поверхностный момент, отсутствует.

Оставшиеся члены в (9) и (10) имеют следующий смысл. Первый член в (9) и (10) дает обычный диа- и парамагнетизм электронного газа. Второй и третий члены определяют периодическую зависимость M от магнитного поля H. Поскольку при $\delta \gg 1$ $\gamma_1 = {}^1/_2$, то первые два члена переходят в обычную формулу для момента в случае неограниченного пространства ([5,6]).

Существенная зависимость всего эффекта от размеров образца возникает при $\delta \sim 1$, т. е. тогда, когда радиус орбиты электронов в магнитном поле ($\sim c\sqrt{2m\zeta_0}\,/\,eH$) становится порядка толщины пластины a. Эта зависимость проявляется в изменении амплитуды и формы огибающей осцилляций магнитного момента M, а также в изменении периода этих осцилляций.

Как видно из выражения (10), при $\delta < 1$ периодические члены зависят от аргумента $f(\delta)\,/\,\eta$ ($f(\delta) = \arcsin\sqrt{\delta} + \sqrt{\delta}\,\sqrt{1-\delta}$), т. е. существует периодическая зависимость момента как от величины поля H, так и от размеров образца a. Анализ этого выражения показывает, что период осцилляций момента M с полем H возрастает с уменьшением размеров a. При малых δ ($\delta \ll 1$) аргумент в периодических слагаемых имеет вид $\frac{\sqrt{\delta}}{\eta}\left(1-\frac{\delta}{6}\right) = \frac{1}{\beta_0}\left(1-\frac{\eta^2}{6\beta_0^2}\right)$; $\beta_0 = a\sqrt{\frac{m\zeta_0}{2\hbar^2}}$; таким образом, при очень малых полях ($\eta^2 \ll \beta_0^3$) периодическая зависимость M от H исчезает.

В заключение пользуемся случаем выразить благодарность акад. Л. Д. Ландау за ценные дискуссии.

Физико-технический институт
Академии наук УССР
Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
21 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Веркин, Б. Лазарев, Н. Руденко, ЖЭТФ, **20**, 93 (1950); ЖЭТФ, **20**, 995 (1950); ЖЭТФ, **21**, 658 (1951); Д. Шенберг, ЖЭТФ, **8**, 1178 (1938); J. Marcus, Phys. Rev., **71**, 559 (1947); D. Shoenberg, Nature, **164**, 225 (1949); T. Berlincourt, Phys. Rev., **88**, 242 (1952). [2] L. Landau, Z. f. Phys., **64**, 629 (1930); Добавление к статье D. Shoenberg, Proc. Roy. Soc., **A 170**, 341 (1939). [3] А. Ахиезер, ДАН, **23**, 872 (1939). [4] Ю. Румер, ЖЭТФ, **18**, 1081 (1948). [5] Г. Зильберман, ЖЭТФ, **21**, 1209 (1951). [6] E. Sondheimer, A. Wilson, Proc. Roy. Soc., **A 210**, 173 (1951). [7] M. Osborne, Phys. Rev., **88**, 438 (1952). [8] R. Steele, Phys. Rev., **88**, 451 (1952). [9] R. Dingle, Proc. Roy. Soc., **A 212**, 47 (1952). [10] В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, М., 1946.