Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

ФИЗИКА

В. М. ВАХНИН

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ РЕАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 VI 1953)

1. Известно, что внутреннюю задачу о колебаниях ограниченной линейной системы удобно решать, разлагая произвольный процесс в ряд по собственным функциям. Удобство такого представления вытекает из свойства ортогональности собственных функций, а также из простого (гармонического) характера изменения во времени соответствующих собственных колебаний. В задачах математической физики обычно применяются собственные функции идеальных резонаторов, получаемые при предположении об отсутствии потерь энергии на границах резонатора. Такие функции имеют характер стоячих волн и могут быть представлены в вещественной форме.

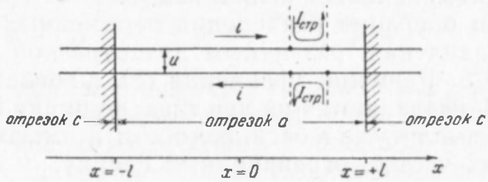

Рис. 1

2. Разложение в ряд по собственным функциям идеального резонатора может быть осуществлено и для реального (с потерями энергии на границах) резонатора. Однако вычисление коэффициентов разложения в этом случае приводит к бесконечным определителям, поскольку вышеуказанные функции в реальном резонаторе теряют свойство ортогональности ([1]). Эти трудности могут быть устранены построением системы собственных функций реальных резонаторов, удовлетворяющих диссипативным граничным условиям и обладающих в реальном резонаторе свойством ортогональности. В настоящей работе исследованы такие функции для одной кусочно-неоднородной одномерной системы.

3. Дана бесконечная двухпроводная линия (рис. 1) с потерями энергии, создаваемыми параллельной распределенной проводимостью G_0. На ограниченном участке a ($|x| \leqslant l$) потерь энергии нет ($G_0(a) = 0$).

Напряжение и ток в линии подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -G_0 u - C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

где L_0 и C_0 — распределенные индуктивность и емкость. На границах отрезка a с полубесконечными отрезками c должны выполняться граничные условия

$$u_a(\pm l) = u_c(\pm l); \quad i_a(\pm l) = i_c(\pm l), \tag{2}$$

а на отрезках c решение должно удовлетворять также условию ограниченности на бесконечности. Распределенные параметры L_0, C_0 считаются постоянными всюду, а G_0 — постоянными всюду на отрезках c.

4. Собственные уравнения описанной системы образуются наложением на решения $(u;\ i)$ требования гармонического затухания:

$$u_\nu = V_\nu(x)\,e^{-\alpha_\nu t}\cos[\omega_\nu t + \varphi_\nu(x)];\quad i_\nu = J_\nu(x)\,e^{-\alpha_\nu t}\cos[\omega_\nu t + \psi_\nu(x)] \tag{3}$$

с последующим переходом к комплексной форме:

$$u_\nu = \dot V_\nu(x)\,e^{-\Omega_\nu t} + \dot V_\nu^*(x)\,e^{-\overset{*}{\Omega}_\nu t};\quad i_\nu = \dot J_\nu(x)\,e^{-\Omega_\nu t} + \dot J_\nu^*(x)\,e^{-\overset{*}{\Omega}_\nu t}, \tag{4}$$

где $\Omega_\nu = \alpha_\nu + j\omega_\nu$ — комплексная собственная частота.

Образуя из (1), как обычно, телеграфное уравнение для напряжения u, подставляя (4) и учитывая линейную независимость сопряженных функций времени $\left(e^{-\Omega_\nu t}\ \text{и}\ e^{-\overset{*}{\Omega}_\nu t}\right)$, получаем собственное уравнение несамосопряженного типа:

$$\frac{\partial^2 \dot V_\nu}{\partial x^2} + (L_0 G_0 \Omega_\nu - L_0 C_0 \Omega_\nu^2)\,\dot V_\nu = 0 \quad (G_0 = 0,\ |x| \leqslant l;\ G_0 > 0,\ |x| > l). \tag{5}$$

Второе уравнение, сопряженное по отношению к (5), можно не рассматривать, поскольку задача инвариантна по отношению к операции комплексного сопряжения.

Изложенные преобразования могут рассматриваться по отношению к комплексным величинам $(\dot U_\nu = \dot V_\nu(x)\,e^{-\Omega_\nu t};\ \dot I_\nu = \dot J_\nu(x)\,e^{-\Omega_\nu t})$ как обычная операция разделения переменных с комплексным коэффициентом разделения, различным для отрезков a и c.

5. Решения уравнения (5), удовлетворяющие граничным условиям (2), разделяются на два типа: функции I типа, неограниченно убывающие по амплитуде в бесконечности и имеющие дискретный спектр собственных частот, ограниченный сверху, и функции II типа, ограниченные по амплитуде в бесконечности, имеющие непрерывный неограниченный спектр собственных частот. Каждое решение образует собственную пару функций $(\dot V_\nu;\ \dot J_\nu)$, ортогональную к другим парам в смысле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (C_0 \dot V_\nu^{\mathrm{I}} \dot V_\xi - L_0 \dot J_\nu^{\mathrm{I}} \dot J_\xi)\,dx = \begin{cases} 0 & (\nu \neq \xi), \\ N & (\nu = \xi), \end{cases} \tag{6}$$

где $\dot V_\nu^{\mathrm{I}}$, $\dot J_\nu^{\mathrm{I}}$ — одна из функций I типа; $\dot V_\xi$, $\dot J_\xi$ — произвольная функция I или II типа, причем нормирующий коэффициент N нигде не равен нулю.

6. Функции I типа, симметричные по напряжению, имеют вид:

$$\text{в отрезке } a\quad \dot V_\nu^{\mathrm{I}} = \operatorname{ch}(\Gamma_a x);\qquad \text{в отрезке } c\quad \dot V_\nu^{\mathrm{I}} = \operatorname{ch}(\Gamma_a l)\,e^{\pm \Gamma_c (x \mp l)} \tag{7}$$

при коэффициентах распространения Γ_a, Γ_c, равных:

$$\Gamma_a = \varkappa_a + j\gamma_a = \Omega\sqrt{L_0 C_0},\quad \Gamma_c = \varkappa_c + j\gamma_c = \sqrt{L_0 C_0 \Omega^2 - L_0 G_0 \Omega}.$$

Соответствующие собственные колебания образуются согласно (4); схематическое изображение такого колебания дано на рис. 2*А*, а конкретный пример — на рис. 2*Б*.

Собственные частоты функций I типа, определяемых (7), находятся из трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{th}(\Gamma_a l) = \Gamma_c / \Gamma_a, \tag{8}$$

причем из бесконечного числа решений (8) должны быть использованы лишь решения, для которых

$$\alpha_\nu < \alpha_{\text{кр}} = G_0 / 2C_0, \tag{9}$$

поскольку при затухании $\alpha > \alpha_{кр}$ — решение на отрезках c неограниченно возрастает в бесконечности.

Функция тока, входящая в «пару» с (7), легко может быть найдена, например, из (1).

Антисимметричные по напряжению функции I типа выражаются аналогично (7), но гиперболический косинус заменяется гиперболическим синусом, а (8) приобретает вид:

$$\operatorname{cth}(\Gamma_a l) = \Gamma_c / \Gamma_a. \qquad (8а)$$

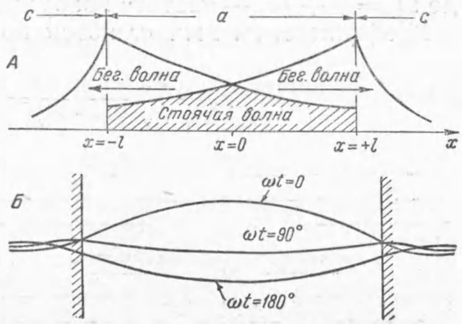

Рис. 2

7. Спектр функций II типа непрерывен и расположен на отрезках: $0 \leqslant \alpha < 2\alpha_{кр}$, $\omega = 0$ (апериодические процессы) и $\alpha = \alpha_{кр}$, $0 < \omega < \infty$ (колебательные процессы с критическим затуханием). Коэффициент распространения для отрезков c — чисто мнимый ($\Gamma_c^{II} = 0 + j\gamma_c$), что определяет постоянство амплитуды на протяжении отрезка c.

Функции II типа, симметричные по напряжению, имеют вид:

$$\text{в отрезке } a \quad \dot{V}_\nu^{II} = \operatorname{ch}(\Gamma_a x);$$
$$\text{в отрезке } c \quad \dot{V}_\nu^{II} = \operatorname{ch}(\Gamma_a l)\left[e^{\pm j\gamma_c(x\mp l)} + s e^{\mp j\gamma_c(x\pm l)}\right]. \qquad (10)$$

Коэффициент s равен единице для апериодических процессов; для колебательных процессов s меньше единицы; следовательно, на отрезке a функция аналогична функции I типа, а на отрезках c является чисто стоячей волной для апериодических процессов и смешанной волной для колебательных.

В точке $\alpha = 0$, $\omega = 0$ существует вырожденное решение $J_\nu(0) = \text{const}$, $V_\nu(0) = 0$; в точке $\alpha = \alpha_{кр}$, $\omega = 0$ существует присоединенное решение, имеющее форму:

$$\text{в области } c \quad U_{\nu(кр)} = V(x)\, t e^{-\alpha_{кр} t};$$
$$\text{в области } a \quad U_{\nu(кр)} = U(t - cx) + U(t + cx). \qquad (11)$$

Функции II типа, антисимметричные по напряжению, аналогичны, но выражаются через $\operatorname{sh}(\Gamma_a x)$.

На рис. 3 дано схематическое изображение колебательной функции II типа.

8. Разложение свободного колебания с начальными условиями U_0, I_0 в ряд по собственным функциям I типа имеет вид:

$$U = \dot{U}^{II} + \sum_\nu \dot{V}_\nu^I k_\nu e^{-\Omega_\nu t}; \quad I = \dot{I}^{II} + \sum_\nu \dot{J}_\nu^I k_\nu e^{-\Omega_\nu t}, \qquad (12)$$

где $\dot{U}^{II}$, $\dot{I}^{II}$ — остаток, ортогональный ко всем функциям I типа. Комплексные коэффициенты разложения k_ν определяются из формулы:

$$k_\nu = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (C_0 U_0 \dot{V}_\nu - L_0 I_0 \dot{J}_\nu)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (C_0 \dot{V}_\nu^2 - L_0 \dot{J}_\nu^2)\, dx} = \frac{F_\nu}{N_\nu}, \qquad (13)$$

где F_ν — коэффициент возбуждения.

Разложение вынужденного синусоидального колебания по собственным функциям I типа имеет вид:

$$U = \left[\dot{U}^{\mathrm{II}} + \sum_{\nu} \dot{V}_{\nu}^{\mathrm{I}} h_{\nu}\right] e^{-\Omega_0 t}; \quad I = \left[I^{\mathrm{II}} + \sum_{\nu} \dot{J}_{\nu}^{\mathrm{I}} h_{\nu}\right] e^{-\Omega_0 t}, \tag{14}$$

где $\Omega_0 = 0 + j\omega_0$ — частота возбуждения, h_ν — коэффициент разложения.

Коэффициенты вычисляются по формуле:

$$h_{\nu} = \frac{P_{\nu}}{N_{\nu}} \frac{1}{\Omega_0 - \Omega_{\nu}} = \frac{P_{\nu}}{N_{\nu}} \frac{1}{\alpha_{\nu} + j(\omega_0 - \omega_{\nu})}, \tag{15}$$

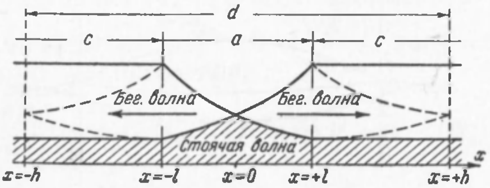

Рис. 3

где P_ν — коэффициент возбуждения, равный, например, для случая возбуждения сторонним током $I_{\text{стр}}$ (рис. 1)

$$P_{\nu} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega_0 L_0 I_{\text{стр}} \dot{J}_{\nu}\, dx. \tag{16}$$

9. Для любого конечного отрезка d ($|x| \leqslant h$; $h \gg l$), включающего весь отрезок a и достаточно большие части отрезков c, можно выделить систему ортогональных функций II типа с дискретным спектром, приравнивая к нулю значение функции в точках $x = \pm h$. Апериодические функции при этом не изменяются, а колебательные деформируются на отрезках c как показано на рис. 3 пунктиром, т. е. приводятся к виду:

$$\dot{V}_{\nu}^{\mathrm{II}'} = \dot{V}_{\nu 0}\, \mathrm{sh}\left[\pm \Gamma_c (x \mp h)\right] \quad (h \leqslant |x| \leqslant l). \tag{17}$$

Затухание колебательных функций при этом становится меньше критического. При неограниченном удалении точек h затухание стремится к критическому, а расстояние между соседними частотами спектра неограниченно уменьшается.

Разложение остатка U^{II}, I^{II} по деформированным функциям II типа в конечном отрезке d дает оценку величины остатка; при увеличении h точность оценки неограниченно возрастает. Можно предположить, что при $h = \infty$ разложение приобретает форму интеграла Фурье.

10. Полученные в настоящей работе результаты можно рассматривать как физическое продолжение работ М. В. Келдыша ([2]) и М. А. Наймарка ([4]) по математической теории несамосопряженных уравнений. Нами показано, что применение собственных функций реальных резонаторов при решении ряда практических задач обеспечивает высшую точность по сравнению с существующим методом поверхностного эффекта ([3]), основанным на применении собственных функций идеального резонатора.

Поступило
30 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. В. Кисунько, Основы теории электромагнитных полых резонаторов, 1948. [2] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951); 77, № 2 (1951). [3] С. М. Рытов, ЖЭТФ, 10, 176 (1940). [4] М. А. Наймарк, ДАН, 85, № 1 (1952).