Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 3

МЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 26 V 1953)

Рассмотрим динамические системы, движущиеся под действием сил, зависящих от скорости. Дифференциальные уравнения движения таких систем имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}-\frac{\partial L}{\partial q_\nu}=Q_\nu(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ \dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_n),\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

Среди систем этого типа находятся неголономные. Другими примерами являются механические системы, на которые действуют силы сопротивления или гироскопические реакции. Будем предполагать, что

$$\frac{\partial(Q_1,\ \ldots,\ Q_n)}{\partial(\dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_n)}\neq 0. \tag{2}$$

Представим уравнения (I) в канонической форме

$$\dot{q}_\nu=\frac{\partial H}{\partial q_\nu},\quad \dot{p}_\nu=\widetilde{Q}_\nu-\frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \tag{3}$$

где

$$H=-L+\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu\dot{q}_\nu,\quad \widetilde{Q}_\nu=Q_\nu\left(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ \frac{\partial H}{\partial p_1},\ \ldots,\ \frac{\partial H}{\partial p_n}\right).$$

Теорема. *Построим дифференциальное уравнение в частных производных*

$$F\left(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ v,\ \frac{\partial v}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial v}{\partial q_n}\right)=0 \tag{4}$$

с помощью исключения импульсов $p_1,\ \ldots,\ p_n$ из системы:

$$H=v,\quad \widetilde{Q}_\nu=\frac{\partial v}{\partial q_\nu},\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{5}$$

Пусть $v(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_n)$ есть полный интеграл уравнения (4) такой, что

$$(\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}_\mu)+\sum_{\lambda=1}^{n}\left(\frac{\partial\widetilde{Q}_\nu}{\partial p_\lambda}\frac{\partial^2 v}{\partial q_\mu\partial q_\lambda}-\frac{\partial\widetilde{Q}_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\partial^2 v}{\partial q_\nu\partial q_\lambda}\right)=0. \tag{6}$$

Вычислим из уравнений $\widetilde{Q}_\nu=\partial v/\partial q_\nu$ импульсы и составим дифференциальную форму

$$\omega(d)=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu dq_\nu. \tag{7}$$

Форма (7) *есть точный дифференциал* ($\omega = dw$).

Интегралами системы (3) *будут зависимости*

$$p_\nu = \frac{\partial w}{\partial q_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

а для получения остальных интегралов системы (3) *необходимо выполнить интеграцию уравнений*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial c_\nu} = \frac{\partial v}{\partial c_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим поле импульсов ([1]):

$$p_\nu = p_\nu(q_1, \ldots, q_n) \tag{10}$$

и представим уравнения (3) в вихревой форме

$$\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \tilde{Q}_\nu - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

где $\tilde{H} = H(q_1, \ldots, q_n, p_1(q_1, \ldots, q_n), \ldots, p_n(q_1, \ldots, q_n))$. Эти уравнения тождественно выполняются, если имеют место равенства (5) и (6). В самом деле, в силу подстановки (5) правые части уравнений (11) равны нулю, а в силу условий (6) функции $\tilde{Q}_\nu - \partial v / \partial q_\nu$ находятся в инволюции, и так как имеет место неравенство (2), а определитель

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\nu \partial \dot{q}_\mu} \right\|$$

не равен нулю, то после импульсов (10) потенциально:

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu} = 0. \tag{12}$$

Покажем, что характеристики интегральных поверхностей уравнения (4) совпадают с траекториями нашей системы. Действительно, уравнение (4) возникает в результате исключения импульсов из системы (5). Но для совместимости этой системы должны выполняться уравнения

$$\tilde{Q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

которые, в силу потенциальности поля импульсов, запишем в виде:

$$\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} = \tilde{Q}_\nu - \frac{\partial H}{\partial q_\nu}. \tag{14}$$

Здесь мы имеем систему квази-линейных дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью. Для ее интегрирования поступаем обычным способом: ищем решения в неявном виде

$$\psi_\nu(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, c_1, \ldots, c_n) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Предполагая, что

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0, \tag{16}$$

получим для определения функций ψ_ν систему:

$$\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial \psi_\nu}{\partial q_\mu} + \sum_{\mu=1}^{n}\left(\tilde{Q}_\mu - \frac{\partial H}{\partial q_\mu}\right)\frac{\partial \psi_\nu}{\partial p_\mu} = 0, \tag{17}$$

т. е. функции ψ_ν определяют интегралы нашей системы (3). Интегралы (15), согласно условиям (12), должны находиться в инволюции. Но условия инволюции $(\psi_\nu\psi_\mu) = 0$ будут выполнены, если учесть условия (6), при таком выборе функции ψ_ν:

$$\psi_\nu = \widetilde{Q}_\nu - \frac{\partial v}{\partial q_\nu}.$$

Отсюда следует, что форма (7) есть точный дифференциал. Следовательно, имеют место интегралы (8). Далее имеем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial c_\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial q_\mu \partial c_\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial c_\nu} = \frac{\partial v}{\partial c_\nu}. \tag{18}$$

З а м е ч а н и е 1. Наибольшую трудность при реализации доказанной теоремы в конкретных случаях представляет проверка выполнимости условий (6). Однако легко построить в явном виде достаточные критерии выполнимости условий (6). В самом деле, из уравнения (4) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial q_\nu} + \frac{\partial F}{\partial v}\widetilde{Q}_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \pi_\mu}\frac{\partial \pi_\mu}{\partial q_\nu} = 0, \quad \pi_\mu = \frac{\partial v}{\partial q_\mu}. \tag{19}$$

Присоединяя к этим уравнениям условия (6)

$$(\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}_\mu) + \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\frac{\partial \widetilde{Q}_\lambda}{\partial p_\lambda}\frac{\partial \pi_\lambda}{\partial q_\mu} - \frac{\partial \widetilde{Q}_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\partial \pi_\lambda}{\partial q_\nu}\right) = 0, \qquad \frac{\partial \pi_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial \pi_\mu}{\partial q_\nu} = 0, \tag{20}$$

имеем n^2 уравнений для определения n^2 функций

$$\frac{\partial \pi_\nu}{\partial p_\mu} = \Pi_{\nu\mu}(q_1, \ldots, q_n, v, \pi_1, \ldots, \pi_n). \tag{21}$$

Отсюда следуют условия совместимости:

$$\frac{\partial \Pi_{\nu\mu}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial \Pi_{\nu\lambda}}{\partial q_\mu} + \frac{\partial \Pi_{\nu\mu}}{\partial v}\widetilde{Q}_\lambda - \frac{\partial \Pi_{\nu\lambda}}{\partial v}\widetilde{Q}_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi_{\nu\lambda}}{\partial \pi_\varkappa}\Pi_{\varkappa\mu} - \frac{\partial \Pi_{\nu\mu}}{\partial \pi_\varkappa}\Pi_{\chi\lambda}\right). \tag{22}$$

З а м е ч а н и е 2. Составим для уравнения (4) систему характеристик Коши

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial F}{\partial \pi_1}} = \cdots = \frac{dq_n}{\dfrac{\partial F}{\partial \pi_n}} = \frac{dv}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial \pi_\nu}\pi_\nu} = \frac{-d\pi_1}{\dfrac{\partial F}{\partial q_1} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\pi_1} = \cdots = \frac{-d\pi_n}{\dfrac{\partial F}{\partial q_n} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\pi_n}. \tag{23}$$

Если найден ее интеграл $\Phi(q_1, \ldots, q_n, v, \pi_1, \ldots, \pi_n) = c$, то интегралом системы (3) будет

$$\Phi(q_1, \ldots, q_n, H, \widetilde{Q}_1, \ldots, \widetilde{Q}_n) = c. \tag{24}$$

Рассмотрим для иллюстрации два примера.

П р и м е р 1. $L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, $Q_\nu = f_\nu(q_\nu)\dot{q}_\nu$, $\nu = 1, 2$. Здесь мы имеем

$$\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) = v, \quad f_1 p_1 = \frac{\partial v}{\partial q_1}, \quad f_2 p_2 = \frac{\partial v}{\partial q_2}.$$

Исключая импульсы, получаем уравнение (4):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{\partial v}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{f_2^2}\left(\frac{\partial v}{\partial q_2}\right)^2\right] = v.$$

Полный интеграл будет

$$v = \frac{1}{2}\left(\int f_1 dq_1 + c_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int f_2 dq_2 + c_2\right)^2.$$

Условия (6) выполнены. Составляем форму (7) и находим

$$w = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \sum_{\nu=1}^{2} \iint f_\nu dq_\nu dq_\nu.$$

Следовательно, уравнения (9) будут

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial c_\nu} = \frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial v}{\partial c_\nu} = \int f_\nu dq_\nu + c_\nu.$$

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = -k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad k = \text{const}.$$

Каноническая система имеет вид

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -kp_\nu - \frac{\partial H}{\partial q_\nu}.$$

Выполним подстановку (5):

$$H = v, \quad -kp_\nu = \frac{\partial v}{\partial q_\nu}.$$

Условия (6) выполняются. Уравнение (4) будет

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, -\frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial q_n}\right) = v.$$

Составив форму ω, находим

$$w = -\frac{1}{k} v.$$

Следовательно, в данном случае система (9) легко интегрируется

$$\frac{\partial v}{\partial c_\nu} = d_\nu e^{-kt}, \quad d_\nu = \text{const}.$$

Институт математики и механики
Академии наук Узб.ССР

Поступило
11 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, ДАН, 65, № 5 (1949).