

С. А. ЧУНИХИН

О ВЛОЖЕНИИ И ЧИСЛЕ ПОДГРУПП У Π -ОТДЕЛИМЫХ ГРУПП

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 V 1953)

§ 1. Классическая теорема Силова для конечных групп и известная теорема Ф. Голла для конечных разрешимых групп делятся, как известно, на следующие четыре части: а) теорема о существовании подгрупп; б) теорема о сопряженности подгрупп; в) теорема о вложении подгрупп; г) теорема о числе подгрупп.

В работах (¹⁻⁵) мы ввели в рассмотрение два новых класса групп, названных нами Π -отделимыми и Π -разрешимыми группами. Понятие Π -отделимой группы позволило нам (³) объединить и обобщить теоремы Силова и Голла в объеме утверждений а) и б). Что же касается теорем вида в) и г), то их справедливость нам удалось тогда установить для класса Π -разрешимых групп (теорема 2 работы (²) или XII работы (⁴) и теорема 3 работы (⁵)). В настоящей статье приводятся несколько полученных нами результатов относительно вложения и числа подгрупп у Π -отделимых групп.

§ 2. Мы будем пользоваться следующими определениями, введенными в наших предыдущих работах (см., например, (⁶)).

Пусть Π — некоторое множество простых чисел и пусть \mathfrak{G} — некоторая конечная группа порядка g . Тогда всякий делитель $m > 1$ числа g такой, что все простые делители m входят в Π и $(m, \frac{g}{m}) = 1$, а также и 1 мы назовем Π -силовским делителем порядка g группы \mathfrak{G} . Группу $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$, где \mathfrak{E} — единичная группа, у которой существует некоторый нормальный ряд $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{G}_r = \mathfrak{E}$, каждый индекс которого среди всех своих различных простых делителей содержит не более одного простого числа из Π , а также и $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$ назовем Π -отделимой группой.

Группу $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$, имеющую такой нормальный ряд, что каждый его индекс или не делится ни на одно простое число из Π , или же является некоторым простым числом, входящим в Π , а также и $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$ назовем Π -разрешимой группой. В частности, при $\Pi = \{p\}$ группу \mathfrak{G} назовем p -разрешимой.

Пусть теперь $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} > 1$ — некоторый Π -силовский делитель порядка g группы \mathfrak{G} , а $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} > 1$ — наибольший Π -силовский делитель g , причем $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$ — различные простые числа из Π .

Пусть $p_j^{\omega_j} > 1$, $j = 1, 2, \dots, n$ — наименьшая из отличных от 1 степеней числа $p_i \in \Pi$, делящих индексы композиционного ряда \mathfrak{G} . Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если m_1 — такой делитель m , что $\left(m_1, \frac{m}{m_1}\right) = 1$, то всякая подгруппа порядка m_1 Π -отделимой группы \mathfrak{G} входит по крайней мере в одну из подгрупп порядка m .

Теорема 2. Пусть $m_1 > 1$ — делитель m и пусть $m_1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots \dots p_l^{\beta_l}$, где p_1, p_2, \dots, p_l — все различные простые делители числа m_1 и $1 \leq l \leq k$. Если для каждого числа p_i из совокупности p_1, p_2, \dots, p_l группа \mathfrak{G} или p_i -разрешима или же выполняется условие $(\alpha_i - \beta_i)(\alpha_i - \omega_i) = 0$, то каждая подгруппа порядка m_1 группы \mathfrak{G} входит по крайней мере в одну из подгрупп порядка m .

Определение. Число тех индексов композиционного ряда произвольной конечной группы \mathfrak{G} , у которых их общий наибольший делитель с числом m больше единицы, назовем m -композиционной длиной группы \mathfrak{G} .

Теорема 3. Если m — композиционная длина Π -отделимой группы \mathfrak{G} равна k и m_1 — любой делитель m , то каждая подгруппа порядка m_1 группы \mathfrak{G} входит по крайней мере в одну из подгрупп порядка m .

Теорема 4. Число ρ подгрупп порядка m в Π -отделимой группе \mathfrak{G} является таким делителем $\frac{g}{m}$, что наивысшая входящая в ρ степень каждого простого числа $p_i \in \Pi$, относительно которого \mathfrak{G} разрешима или для которого $\omega_j = \alpha_j$, есть делитель некоторого индекса главного ряда \mathfrak{G} и сравнима с единицей по некоторому простому делителю числа m .

При доказательстве этих теорем используется наша основная теорема о Π -отделимых группах ⁽³⁾, а также рассуждения, аналогичные доказательству теоремы XII нашей работы ⁽⁴⁾.

Поступило
13 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. А. Чунихин, ДАН, 55, № 6 (1947). ² С. А. Чунихин, ДАН, 58, № 7 (1947). ³ С. А. Чунихин, ДАН, 59, № 3 (1948). ⁴ С. А. Чунихин, Матем. сборн., 25 (67), № 3 (1949). ⁵ С. А. Чунихин, ДАН, 63, № 1 (1950). ⁶ С. А. Чунихин, ДАН, 83, № 5 (1952).