Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. РУБИНШТЕЙН

О ДИНАМИКЕ ИСПАРЕНИЯ ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ РАСТВОРОВ С НЕЛЕТУЧИМ РАСТВОРИТЕЛЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 V 1953)

В настоящей заметке рассматривается испарение разбавленного поликомпонентного раствора с нелетучим растворителем в предположении:

а) чисто диффузионного, без конвекции, характера распространения пара в открытой атмосфере и

б) сохранения во все время течения процесса пространственной однородности жидкой фазы.

Мы ограничиваемся рассмотрением одномерного случая и притом не в точной, а в приближенной трактовке. Именно: условия на поверхности испарения мы сносим на ее прообраз — в начальный момент. Очевидно, что вносимая этим погрешность будет тем меньше, чем меньше мощность испаряющегося слоя. Заметим, что этим приемом, не формулируя его, однако, явно, пользовался Л. С. Лейбензон в его известной работе об испарении капли ([1]). Замена неизвестной изменяющейся во времени границы известной и неизменяющейся дает возможность выразить состав жидкой фазы и мощность испаряющегося слоя в аналитически-замкнутой, легко обозримой форме.

Итак, пусть дана $n+1$-компонентная пространственно-однородная жидкая смесь состава $N_0+N_1+\ldots+N_n=1$. Здесь N_i — молярная дробь компонента i. Индекс $i=0$ относим к растворителю, который считаем нелетучим. Раствор считаем разбавленным.

Пусть $h(t)$ — мощность испаряющегося слоя; $n_i(t)$ — число молей компонента i в столбе раствора мощности $h(t)$ и единичного сечения.

В силу сделанных предположений

$$n_0=\text{const};\quad N_i=\frac{n_i}{n_0}\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n);\qquad N_0=\frac{n_0}{n_0+n_1+\ldots+n_n}. \tag{1}$$

Пусть, далее, $C_i(x,\ t)$ — концентрация пара компонента i, C_{mi} — его равновесная концентрация над раствором состава $N_0+N_1+\ldots+N_n=1$ и C^0_{mi} — концентрация насыщенного пара над компонентом i в жидкой фазе.

В силу закона Рауля должны иметь:

$$C_{mi}=C^0_{mi}N_i\qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{2}$$

Пусть $x=y(t)$ $(y(0)=0)$ — уравнение поверхности испарения.

Должны иметь:

$$C_i \big|_{x=y(t)} = C_{mi}; \quad \frac{dn_i}{dt} = D_i \frac{\partial C_i}{\partial x}\bigg|_{x=y(t)}. \tag{3}$$

Здесь D_i — коэффициент диффузии пара компонента i.

В соответствии со сказанным выше, условия (3) заменяем приближенными условиями

$$C_i \big|_{x=0} = C_{mi}; \quad \frac{dn_i}{dt} = D_i \frac{\partial C_i}{\partial x}\bigg|_{x=0}. \tag{4}$$

Вместе с тем область $x > y(t)$, занимаемую паровой фазой, заменяем областью $x > 0$. В этой области

$$D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} = \frac{\partial C_i}{\partial t} \quad (x > 0;\ t > 0;\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{5}$$

в силу предположения о безконвективном характере распространения пара в атмосфере.

Будем считать, что при смешении компонентов имеет место аддитивность объемов. Пусть M_i и d_i, соответственно, молярный вес и плотность компонента i в жидкой фазе. Тогда, очевидно:

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{M_i n_i(t)}{d_i}. \tag{6}$$

Итак, задача состоит в определении $n_i(t)$ и $h(t)$ из условий (4), (5), (1), (2) и (6).

Положим

$$V_i(t) = \frac{\partial C_i}{\partial x}\bigg|_{x=0} \tag{7}$$

и обозначим через G_i функцию Грина второй краевой задачи уравнения теплопроводности (5) для полупрямой $x > 0$. Должны иметь:

$$C_i = -D_i \int_0^t V_i G_i \big|_{\xi=0} d\tau. \tag{8*}$$

Переходя к пределу при $x \to 0$ и пользуясь первым из условий (4), найдем

$$C_{mi} = -D_i \int_0^t V_i(\tau) G_i \big|_{x=\xi=0} d\tau = -\sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \int_0^t \frac{V_i(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\ *. \tag{8}$$

Обращение уравнения (8) дает

$$V_i(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi D_i}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{C_{mi}\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = -\frac{C_{mi}(0)}{\sqrt{\pi D_i t}} - \frac{1}{\sqrt{\pi D_i}} \int_0^t \frac{dC_{mi}}{ds} \frac{ds}{\sqrt{t-s}}; \tag{9}$$

внося сюда dC_{mi}/ds из (2), (1), (4) и (7), найдем:

$$V_i(t) = -\frac{C_{mi}^0}{n_0 \sqrt{\pi D_i t}} - \frac{C_{mi}^0 \sqrt{D_i}}{n_0 \sqrt{\pi}} \int_0^t V_i(s) \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{10}$$

---

* Напоминаем, что

$$G_i(x,\ \xi,\ t-\tau) = E(x-\xi,\ D_i(t-\tau)) + E(x+\xi,\ D_i(t-\tau)),$$

где

$$E(x,\ t) = \exp(-x^2/4t)\ (4\pi t)^{-1/2}\ (^2).$$

Уравнения (10) без труда решаются операционным методом. Пусть $W_i(p) \div V_i(t)$. Легко видеть, что

$$W_i(p) = -\frac{C_{mi}^0 n_{i0} p}{n_0 \sqrt{D_i}} : \left(\frac{C_{mi}^0 \sqrt{D_i}}{n_0} + \sqrt{p}\right). \tag{11}$$

Как известно ([3]), прообраз оператора $p/(a+\sqrt{p})$ имеет вид

$$(\pi t)^{-1/2} - a \exp(a^2 t) \operatorname{erfc}(a\sqrt{t}).$$

В силу этого

$$V_i(t) = -\frac{C_{mi}^0 n_{i0}}{n_0 \sqrt{\pi D_i t}} + \frac{C_{mi}^{0\,2} n_{i0}}{n_0^2} \exp\left(\frac{C_{mi}^{0\,2} D_i t}{n_0^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{C_{mi}^0 \sqrt{D_i t}}{n_0}\right). \tag{12}$$

Внося (12) в (4), найдем

$$n_i(t) = n_{i0} \exp\left(\frac{C_{mi}^{0\,2} D_i t}{n_0^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{C_{mi}^0 \sqrt{D_i t}}{n_0}\right). \tag{13}$$

Наконец, внося (13) в (6), получим

$$h(t) = \frac{n_0 M_0}{d_0} + \sum_{i=1}^{n} n_{i0} \frac{M_i}{d_i} \exp\left(\frac{C_{mi}^{0\,2} D_i t}{n_0^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{C_{mi}^0 \sqrt{D_i t}}{n_0}\right), \tag{14}$$

что и заканчивает решение поставленной задачи.

Туркменский филиал ВНИИ
г. Небит-Даг

Поступило
21 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 621 (1940). [2] Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, 1947. [3] Н. А. Диткин, П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, М., 1951.