Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 3

МАТЕМАТИКА

Л. В. ОВСЯННИКОВ

О ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ В ОДНОМ КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ДАРБУ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 V 1953)

Одной из основных краевых задач для уравнения Эйлера — Дарбу

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (\mathscr{E})$$

является «Задача Трикоми», состоящая в определении решения $(\mathscr{E})$ в «смешанной» области S (рис. 1) по заданным значениям этого решения на незамкнутом контуре $CAKB$, где K — «произвольная» кривая, а AC и BC — дуги характеристик уравнения $(\mathscr{E})$.

До сих пор были известны результаты [1,2], относящиеся, главным образом, к проблемам существования и единственности решения этой задачи. Помимо этих проблем важное значение имеет вопрос об эффективном представлении решения, пригодном для численных расчетов. В настоящей заметке этот вопрос, в некотором смысле, решается для определенного класса решений $(\mathscr{E})$.

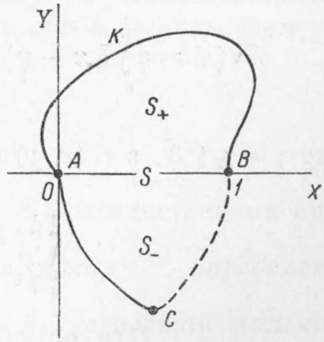

Рис. 1

Будем говорить, что функция $u(x, y)$ есть обобщенное решение класса P_S, если

1°. $u(x, y)$ непрерывна в $\bar{S}$.

2°. $u(x, y) = 0$ на кривой K.

3°. $u(x, y)$ имеет в области S_+ вторые производные, удовлетворяющие уравнению $(\mathscr{E})$.

4°. Существует функция $\nu(x) \in L_2(0, 1)$ такая, что

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{x_h'}^{x_h''} w(x, h)\,[u_y(x, h) - \nu(x)]\,dx = 0$$

для любой функции $w(x, y)$, непрерывной в $\bar{S}_+$. Здесь x_h' и x_h'' — абсциссы точек пересечения кривой K с прямой $y = h > 0$, причем считается, что $\nu(x) = 0$ если $x \bar{\in} (0, 1)$.

5°. $u(x, y)$ в области S_- определена формулой

$$u(x, y) = \gamma_1 (\eta - \xi)^{2/3} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{u(s, 0)\,ds}{(\eta - s)^{5/6}(s - \xi)^{5/6}} - \gamma_2 \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\nu(s)\,ds}{(\eta - s)^{1/6}(s - \xi)^{1/6}},$$

где

$$\xi = x - {}^2/_3(-y)^{3/2}, \quad \eta = x + {}^2/_3(-y)^{3/2};$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(^1/_3)}{\Gamma^2(^1/_6)}, \quad \gamma_2 = (^3/_4)^{2/3}\frac{\Gamma(^5/_3)}{\Gamma^2(^5/_6)}.$$

Прямой проверкой ([1]) можно убедиться, что всякое дважды непрерывно дифференцируемое в $\bar{S}$ и равное нулю на K решение (E) входит в P_S.

Обозначим через N оператор, который, согласно 4°, сопоставляет решению $u(x, y) \in P_S$ функцию $\nu(x) \in L_2(0, 1)$, так что $\nu(x) = Nu(x, y)$.

Будем рассматривать класс P_S только для кривых K, удовлетворяющих следующим условиям:

I. Существует обратный оператор N^{-1}, так что $u(x, y) = N^{-1}\nu(x) \in P_S$, если $\nu(x) \in L_2(0, 1)$.

II. Если $u(x, y) \in P_S$, то при любом $h > 0$

$$\iint\limits_{S+h} (yu_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy + \int\limits_{x_h'}^{x_h''} u(x, h)\,u_y(x, h)\,dx = 0,$$

где S_{+h} есть пересечение S_+ с полуплоскостью $y > h$, а x_h' и x_h'' определены как в 4°.

III. Оператор T, определенный для $u(x, y) \in P_S$ формулой $u(x, 0) = -TNu(x, y)$, допускает представление:

$$T\nu(x) = \gamma\int\limits_0^1 [|x-y|^{-1/3} - (x+y-2xy)^{-1/3} + G(x, y)]\,\nu(y)\,dy,$$

где $\gamma = \gamma_2\sqrt{3}$, а $G(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^x \frac{G(t, y)\,dt}{(x-t)^{2/3}}\right]^2 dx\,dy < \infty,$$

$$G(x, y) = G(y, x), \quad G(0, y) = G(1, y) = 0.$$

Условия I—III, во всяком случае, выполняются, если K есть «нормальная кривая» $4y^3 = 9x(1-x)$ или, вообще, гладкая кривая, совпадающая в окрестности точек A и B с «нормальной кривой». Исследование множества кривых K со свойствами I—III представляет самостоятельный интерес.

Определим еще оператор W формулой

$$Wf(x) = \gamma\int\limits_0^x \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1/3}}.$$

Теорема 1. *Для всякого решения* $u(x, y) \in P_S$ *существует функция* $\rho(x) \in L_2(0, 1)$ *такая, что* $u(x, 0) = W\rho(x)$.

Доказательство этой теоремы основано на теореме К. И. Бабенко ([3]).

Теорема 2. *Существует постоянная A_1, зависящая только от кривой K, такая, что для любого решения $u(x, y) \in P_S$ во всей области $\overline{S}$*

$$|u(x, y)| \leqslant A_1 \| \nu(x) \|,$$

где $\nu(x) = Nu(x, y)$.

Оператор T, как оператор в $L_2(0, 1)$, вполне непрерывный и самосопряженный. Пусть $\{\nu_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — ортонормированная система его собственных функций. Из II следует, что система $\{\nu_k(x)\}$ полна в $L_2(0, 1)$.

Назовем собственными решениями функции $u_k(x, y) = N^{-1}\nu_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 3. *Всякое решение $u(x, y) \in P_S$ может быть разложено в ряд по собственным решениям, равномерно сходящийся в $\overline{S}$. Это разложение единственно и дается формулой*

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\nu, \nu_k)\, u_k(x, y), \tag{1}$$

где $\nu(x) = Nu(x, y)$.

Теорема 4. *Всякий ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, y) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty \right)$$

равномерно сходится в $\overline{S}$, и его сумма есть решение класса P_S.

Теоремы 3 и 4 дают исчерпывающую функциональную характеристику класса P_S.

Пусть $\varphi(\eta)$ есть значение решения $u(x, y) \in P_S$ на характеристике AC $(\xi = 0)$. На основании 5° и теоремы 1 простым вычислением устанавливается существование функции $\psi(x) \in L_2(0, 1)$ такой, что

$$\varphi(\eta) = \gamma_2 \int_0^{\eta} \frac{\psi(s)\, ds}{s^{1/6} (\eta - s)^{1/6}}, \tag{2}$$

причем $\psi(x) = -(E + W^{-1}T)\, Nu(x, y)$, где E — тождественный оператор. Положим $L = E + W^{-1}T$.

Теорема 5. *Существует обратный оператор L^{-1}, определенный и ограниченный в $L_2(0, 1)$.*

Теорема 6. *Существует постоянная A_2, зависящая только от кривой K, такая, что для любого решения $u(x, y) \in P_S$ во всей области $\overline{S}$*

$$|u(x, y)| \leqslant A_2 \| \psi(x) \|,$$

где

$$\psi(x) = -LNu(x, y). \tag{3}$$

Теорема 6 дает обобщение принципа максимума, установленного К. И. Бабенко ([2]), на весь класс решений P_S.

В силу (2) задачу Трикоми естественно поставить как задачу обращения уравнения (3) при заданной функции $\psi(x) \in L_2(0, 1)$. Из теоремы 5 следует существование и единственность решения этой задачи.

Вернемся к собственным решениям $u_k(x, y)$ и положим $\psi_k(x) = -LNu_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 7. *Система $\{\psi_k\}$ линейно независима и полна в $L_2(0, 1)$.*

Теорема 8. *Всякая функция $\psi \in L_2$ может быть разложена* *в ряд по функциям* $\{\psi_k\}$, *сходящийся в* L_2. *Это разложение единственно и дается формулой*

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} (\nu, \nu_k) \psi_k, \tag{4}$$

где $\nu = -L^{-1}\psi$.

Таким образом, в нашей постановке решение задачи Трикоми сводится к выполнению разложения (4) и построению ряда (1). Приближенное решение можно строить по методу наименьших квадратов, определяя числа $\alpha_k^{(n)}$ из условия

$$\left\| \psi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \psi_k \right\| = \min$$

и образуя решение $v_n(x, y)$ по формуле

$$v_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} u_k(x, y).$$

В силу полноты системы $\{\psi_k\}$ и теоремы 6, последовательность $\{v_n(x, y)\}$ при $n \to \infty$ равномерно в $\overline{S}$ сходится к искомому решению задачи Трикоми.

Примером области S_+, для которой данный метод является эффективным, служит полуполоса $(0 < x < 1,\ y > 0)$. В этом случае условия I—III выполнены, так что изложенная теория применима. Здесь $\nu_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x$, а собственные решения имеют вид

$$u_k(x, y) = -\frac{\sqrt{2}\gamma\Gamma(^2/_3)}{(\pi k)^{^2/_3}} \lambda(\pi^{^2/_3} k^{^2/_3} y) \sin \pi k x,$$

где функция $\lambda(t)$ определена уравнениями

$$\lambda''(t) - t\lambda(t) = 0, \quad \lambda(0) = 1, \quad \lambda(+\infty) = 0.$$

Система функций $\{\psi_k\}$ дается формулой

$$\psi_k(x) = -\sqrt{2}\gamma\Psi(\pi k x) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\Psi(x) = \sin x + \frac{1}{\Gamma(^1/_3)} \int_0^x \frac{\cos t\, dt}{(x-t)^{^2/_3}}.$$

Поступило
14 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Трикоми, О линейных уравнениях смешанного типа, 1947. [2] К. И. Бабенко, Докторская диссертация, 1952. [3] К. И. Бабенко, ДАН, 62, № 2 (1949).