Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. БАБИЧ и А. АЛЕКСЕЕВ

ОБ ЭКРАНИРУЮЩЕМ ДЕЙСТВИИ ТОНКОГО УПРУГОГО СЛОЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 V 1953)

При изучении законов распространения волн в слоистых средах приходится встречаться со случаями падения произвольного вида волн на тонкий слой под углами, превосходящими предельный угол полного внутреннего отражения. Согласно законам геометрической оптики, в таких случаях возмущение не должно было бы проходить через слой. В действительности же возмущение частично проникает через экранирующий слой, причем тем больше, чем меньше толщина слоя и чем ближе к предельному угол падения луча.

Это явление, называемое явлением экранирования, не имело достаточного объяснения в теории упругости. В настоящей заметке излагаются результаты нашей работы, объясняющие некоторые эффекты экранирования тонким слоем.

Пусть в цилиндрической системе координат задан упругий изотропный однородный слой $-h \leqslant z \leqslant 0$, заключенный между двумя полупространствами $z > 0$ и $z < -h$, упругие свойства которых отличны от свойств слоя, причем на граничных поверхностях $z = 0$ и $z = -h$ выполняются условия непрерывности смещений и напряжений.

Будем считать, что при $t < 0$ система покоится, а в момент $t = 0$ в точке $z = z_0 > 0$, $r = 0$ включается резкое воздействие, создающее осесимметрическое возмущение.

Решение сформулированной динамической задачи теории упругости легко может быть построено методом неполного разделения переменных ([1]).

Для исследования явлений в полупространстве $z < -h$ выделим из решения продольную волну, прошедшую слой без отражений и распространяющуюся в этом полупространстве. Ради простоты предположим, что скорости распространения волн в полупространствах одинаковы, а скорости распространения волн в слое больше соответствующих скоростей в полупространствах.

Потенциал, соответствующий выделенной волне, имеет вид:

$$\varphi = \int_0^\infty R(z,\ t,\ k)\, \frac{J_0(kr)}{k}\, dk, \tag{1}$$

$$R(z,\ t,\ k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(\zeta)\, e^{kf(z,\ z_0,\ t,\ \zeta,\ h)}\, d\zeta \quad (\sigma > 0), \tag{2}$$

где

$$F(\zeta) = \frac{\alpha_1\alpha_2\delta_2^2\zeta T_4^2}{\pi\mu_2(T_1T_4 - T_2T_3)^2}; \quad f(z, z_0, t, \zeta, h) = \frac{t}{b_1} - H\alpha_1 - h\alpha_2;$$

$$T_1 = [2(1-\sigma_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + \zeta^2(\alpha_1\delta_2^2 + \alpha_2\sigma_1)];$$

$$T_2 = [2(1-\sigma_1)(\alpha_2\beta_1 - 1) + \zeta^2(\sigma_1 - \delta_2^2)];$$

$$T_3 = [2(1-\sigma_1)(\alpha_1\beta_2 - 1) + \zeta^2(\sigma_1 - \delta_2^2)];$$

$$T_4 = [2(1-\sigma_1)(\beta_1 - \beta_2) + \zeta^2(\beta_1\delta_2^2 + \beta_2\sigma_1)];$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + \gamma_1^2\zeta^2}; \quad \alpha_2 = \sqrt{1 + \gamma_2^2\zeta^2}; \quad \beta_1 = \sqrt{1 + \zeta^2}; \quad \beta_2 = \sqrt{1 + \delta_2^2\zeta^2};$$

$$H = z_0 - z - h; \quad \delta_2 = \frac{b_2}{b_1}; \quad \gamma_1 = \frac{a_1}{b_1}; \quad \gamma_2 = \frac{a_2}{b_1}; \quad \sigma_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Здесь a_ν и b_ν — обратные скорости распространения, соответственно, продольных и поперечных волн; μ_ν — модуль сдвига. Величины со значком $\nu = 1$ относятся к полупространствам, а величины со значком $\nu = 2$ — к слою.

Разобьем промежуток интегрирования в (1) на две части точкой $k_0 > 0$ и будем интересоваться только быстро изменяющейся частью волнового поля, представляемой интегралом (1), распространенным по промежутку $[k_0, \infty)$.

Предполагая справедливым неравенство $k_0 \frac{t}{b_1} \gg 1$, можно применять к исследованию интегралов (1) и (2) (с измененным нижним пределом в формуле (1)) метод стационарной фазы. Для его проведения необходимо, как известно, исследовать корни уравнения $f'_\zeta(z, z_0, t, \zeta, h) = 0$.

Это исследование приводит к следующим выводам: на мнимой оси всегда имеются два взаимно сопряженных корня $\zeta_{1,2} = \pm i\tau_1$. При выполнении условия $t > Ha_1\left(1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right)^{-1/2}$ (*)

существуют еще два корня $\zeta_{3,4} = -d\left(\frac{h}{H}\right) \pm i\tau_2$. В последней формуле $d = d(z, t) > 0$ обозначает функцию, ограниченную при $\left(\frac{h}{H}\right) \to 0$.

При невыполнении условия (*) и $\left(\frac{h}{H}\right) \to 0$ корни ζ_1 и ζ_2 стремятся к корням уравнения $f'_\zeta(z, z_0, t, \zeta, 0) = 0$. Когда неравенство выполнено, ζ_3 и ζ_4 стремятся к корням уравнения $f'_\zeta(z, z_0, t, \zeta, 0) = 0$, а также $\zeta_{1,2} \to \pm\frac{i}{\gamma_2}$, причем разность $\left(\zeta_{1,2} \pm \frac{i}{\gamma_2}\right)$ при $\left(\frac{h}{H}\right) \to 0$ имеет порядок $\left(\frac{h}{H}\right)^2$.

Если провести контуры «наискорейшего спуска» [2] через все эти точки, то оказывается, что главная часть интеграла (2) определяется интегрированием по малым окрестностям «седловых» точек $\zeta_{1,2}$ и $\zeta_{3,4}$.

Полученные формулы для смещений, имеющие весьма малую погрешность в достаточно малой окрестности фронтов, позволяют сделать некоторые качественные и количественные заключения относительно волн, прошедших слой.

Проведем из точки O, где помещается источник колебаний, конус с углом раствора, равным 2α (см. рис. 1, через α обозначен угол полного внутреннего отражения).

Тогда можно убедиться, что точки волновых фронтов, для которых выполнено условие (*), лежат вне конуса. Точкам фронтов, лежащим внутри конуса, соответствует неравенство, обратное неравенству (*).

Волновому фронту $ABCD$ соответствуют «седловые» точки ζ_1 и ζ_2. Этот волновой фронт можно построить по законам геометрической оптики.

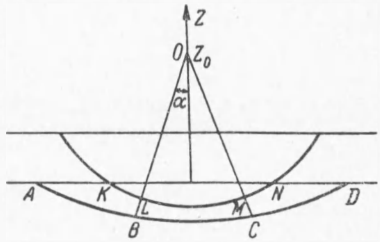

Рис. 1

Дуга окружности $KLMN$ изображает положение волнового фронта в пространстве при отсутствии слоя.

Справедливы следующие утверждения:

1. Положение фронта BC в пределе при $\left(\frac{h}{H}\right) \to 0$ совпадает с LM.

2. При $\left(\frac{h}{H}\right) \to 0$ скачки смещений на фронтах AB и CD стремятся к нулю и имеют порядок $\left(\frac{h}{H}\right)^2$.

3. Вне конуса полного внутреннего отражения при $\left(\frac{h}{H}\right) \to 0$ возникают и усиливаются «фронты» вблизи дуг KL и MN. Эти «фронты» получаются за счет интегрирования по окрестности седловых точек ζ_3 и ζ_4.

В силу того, что $d(z, t)$ (в формуле для ζ_3 и ζ_4) не равно нулю, на этих «фронтах» нет разрывов, но имеется гладкое возмущение.

При $\left(\frac{h}{H}\right) \to 0$ это возмущение становится все более резким, в пределе соответствующие «фронты» приобретают разрывы, а положение их совпадает с KL и MN.

Надо отметить, что геометрическая оптика, не способная дать динамические характеристики волновых процессов, в данном случае не дает и положения упомянутых «фронтов». Однако, ввиду резкости возмущений вблизи них при $\left(\frac{h}{H}\right) << 1$, они были обнаружены экспериментально и описаны в работе И. С. Берзон и А. М. Епинатьевой ([3]).

Таким образом, рассмотрение явления экранирования еще раз устанавливает недостаточность использования методов геометрической оптики для сейсморазведки и полную возможность приложений динамической теории упругости.

В заключение мы считаем приятным долгом выразить благодарность Г. И. Петрашень, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Поступило
20 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. И. Петрашень, Г. И. Марчук, К. И. Огурцов, Уч. зап. ЛГУ, № 35, сер. матем., в. 21 (1950). [2] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 3, ч. II, стр. 286 (1949). [3] И. С. Берзон, А. М. Епинатьева, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 14, № 6 (1950).