Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 3

МАТЕМАТИКА

К. К. МОКРИЩЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЗАДАЧ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО С ПОМОЩЬЮ ГИПЕРЦИРКУЛЯ ИЛИ ЦИРКУЛЯ И ОРИЦИРКУЛЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 V 1953)

А. С. Смогоржевский ([1]) доказал, что любая конструктивная задача второй степени в плоскости Лобачевского может быть решена без помощи линейки, если пользоваться всеми тремя циркулями пространства Лобачевского: обычным циркулем, орициркулем и гиперциркулем. В. Ф. Рогаченко ([2]) показал, что для этого достаточен любой из комплексов инструментов: циркуль — гиперциркуль и орициркуль — гиперциркуль.

В настоящей заметке доказывается разрешимость всех названных задач при помощи одного лишь гиперциркуля, а также при помощи комплекса циркуль — орициркуль. Для этого достаточно (([3]), § 32) решить так называемые элементарные и главные задачи.

Условимся обозначать символами: $e(AB, d)$ — гиперцикл с базой AB и дистанцией, равной d; $e(AB, C)$ — гиперцикл с базой AB, проходящий через точку C; $h(AB, C)$ — орицикл с осью AB, проходящий через точку C, и $k(O, r)$ — окружность с центром в точке O, и радиусом r.

Линии, не вычерчиваемые используемыми инструментами, обозначены на чертежах пунктиром.

§ 1. Построения при помощи гиперциркуля Решение элементарных задач

1°. Разделить пополам данный угол AOB. Решение дано в ([3]) (задача 382).

2°. Удвоить данный отрезок AB. Проводим $e_1(BC, A)$ и $e_2(BD, A)$, где C и D — произвольные точки вне прямой AB; ее отрезок, заключенный между e_1 и e_2 — искомый.

Для дальнейшего важна следующая вспомогательная задача.

Вспомогательная задача I. Построить прямую, перпендикулярную к данной прямой AB. Проводим (рис. 1) одну ветвь $e_1(AB, d_1)$, где d_1 произвольно, и берем на ней произвольные точки P и Q. Проводим ветвь $e_2(AB, d_2)$, d_2 произвольно, но меньше d_1. Находим точки R и S пересечения e_2 с $e_3(PQ, d_3)$, где d_3 произвольная, но достаточно большая дистанция. Строим точки C и D, принадлежащие биссектрисе угла между прямыми PR и QS (1°); $CD \perp AB$.

3°. Из данной точки A опустить перпендикуляр на данную прямую BC. Строим $MN \perp BC$ (I). Проводим обе ветви

$e(BC, A)$ и $e_1(MN, A)$. Точки A и A' пересечения e и e_1 симметричны относительно BC.

Теперь нетрудно решить задачи:

4°. Удвоить данный угол AOB.

5°. Восстановить перпендикуляр к данной прямой AB в данной на ней точке B.

6°. Построить угол, равный данному углу AOB, при данной прямой CD в данной на ней точке C. Строим $OE \perp OA$ и $CF \perp CD$ (5°). Проводим $e_1(OA, B)$ и $e_2(OE, B)$ и им конгруентные e_3 и e_4 с базами CD и CF; если $G \equiv e_3 \times e_4$, то $\angle DCG$ — искомый или пополнительный для него.

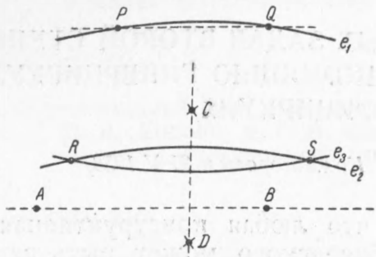

Рис. 1

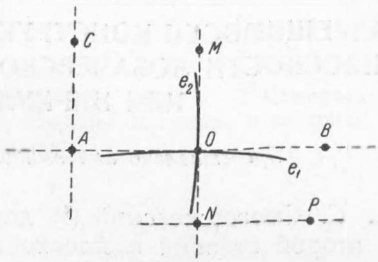

Рис. 2

7°. Перенести данный отрезок AB на данную прямую MN, отложив его от точки M. Используем построения (5°) и (1°).

Вспомогательная задача II. Построить медиатрису данного отрезка AB. Используя построения (5°) и (6°), строим точки P и Q, симметричные относительно искомой медиатрисы, затем находим две точки K и L, ей принадлежащие (1°).

8°. Разделить пополам данный отрезок AB. Строим (рис. 2) точки M и N медиатрисы отрезка AB (II), $AC \perp AB$ и $NP \perp MN$ (5°). Проводим ветви $e_1(NP, d_1)$ и $e_2(AC, d_2)$, где d_1 и d_2 — соответственно, расстояния точки N от AB и точки A от MN. Точка $O \equiv e_1 \times e_2$ — искомая.

Решение главных задач

А. Даны две прямые AB и CD, построить их точку пересечения. Проводим $e_1(AB, d)$ и $e_2(CD, d)$, где d — произвольно, и находим (8°) средину O одной из диагоналей полученного «ромба».

Б. Даны прямая AB и окружность $k(O, r)$, построить их точки пересечения. Решается как в ([3]) (задача 390).

В. Даны две окружности $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, построить их точки пересечения. Способом, указанным в ([3]) (задача 267), эту задачу с помощью построений (1°) — (8°) можно свести к предыдущей.

Полученный результат аналогичен давно известному факту ([4]), что все конструктивные задачи второй степени в плоскости Евклида разрешимы с помощью одного лишь циркуля.

§ 2. Построения при помощи циркуля и орициркуля

Задачи (3°) и (4°) с помощью циркуля решаются так же, как и в плоскости Евклида.

1°. Проводим $h_1(OA, O)$, $h_2(OB, O)$ и $k(O, r)$, где r произвольно, и вокруг их точек пересечения, симметрично расположенных относительно искомой биссектрисы, как центров описываем окружности одного произвольного радиуса — их точки пересечения лежат на биссектрисе угла AOB.

2°. Проводим $k(B, AB)$ и по одну сторону от AB строим $h_1(BA, B)$ и $h_2(AB, B)$; находим точки $C \equiv h_1 \times k$ и $D \equiv h_2 \times k$. В соответствующем направлении по $k(B, AB)$ откладываем $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{AC}$, тогда точка E лежит на прямой AB и $AE = 2AB$.

5°. Используем построения (2°).

6°. Строим дугу $h_1(OA, O)$ в одной полуплоскости с OB относительно OA, $h_2(CD, C)$, $k_1(O, OB)$ и $k_2(C, OB)$. Пусть $E \equiv h_1 \times k_1$ и F — одна из точек пересечения h_2 с k_2. Откладываем по k_2 в соответствующем направлении $\overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{EB}$, тогда $\angle DCG$ удовлетворяет требованиям задачи.

7°. Строим $k_1(M, AB)$ и берем на ней произвольную точку C. Находим точку D биссектрисы угла NCM (1°) и проводим $k_2(D, DC)$. Если $E \equiv k_1 \times k_2$, то ME — искомый.

Далее необходимо решить следующие вспомогательные задачи.

а) Из данной точки A провести прямую, параллельную заданной прямой CD. Используется свойство осей орицикла и (3°).

б) Построить точки пересечения данного орицикла с прямою, не совпадающей с его осью. Строим орицикл, симметричный данному относительно данной прямой.

в) Дан отрезок AB. Из точки A провести касательные к $h(AB, B)$. Используется свойство касательных орицикла (([3]), стр. 256). Отсюда вытекает следствие:

Окружность $\varkappa(A, AB)$ симметрична (в смысле инверсионного преобразования) абсолюту плоскости относительно окружности $k(A, AN)$, где N — точка касания касательной, проведенной из точки A к $h(AB, B)$ (([6]), гл. VII), 13°).

г) Построить окружность, симметричную абсолюту плоскости относительно произвольно данной $k(O, r)$. Берем на $k(O, r)$ произвольную точку A, проводим луч $AD \perp OA$ (5°) и $h(AD, A)$; h пересечет $k(O, r)$ ортогонально в точках A и B. Находим точки M и N пересечения $k_1(A, R)$ и $k_2(B, R)$ произвольного R. Прямая MN есть ось h, проходящая через O. Пусть $MN \parallel AD$. Находим точки P и Q пересечения $k(O, r)$ и $h_1(MN, O)$. Если по одну сторону от прямой MN лежат точки A и P, то $\varkappa(O, AP)$ будет искомой (в), следствие).

д) Построить точку, симметричную данной точке, относительно данной окружности.

е) Построить линию, симметричную данной прямой AB, относительно произвольно выбранной $k(O, r)$, не пересекающей AB.

Обе эти задачи можно решить как в ([6]) (гл. VII, 14° и 15°).

А. На прямой AB произвольно берем точку O и проводим $k(O, r)$ такого радиуса r, чтобы она не пересекала CD. Строим окружность $\varkappa$, симметричную абсолюту плоскости относительно $k(O, r)$ (г) и дугу k' окружности, симметричную CD относительно $k(O, r)$ (е). Находим $L' \equiv AB \times k'$ (Б), тогда точка L, симметричная L' относительно $k(O, r)$ — искомая.

8°. С помощью циркуля строим точки C и D, лежащие на медиатрисе отрезка AB, и находим точку $O \equiv AB \times CD$ (А), тогда $AO = OB = {}^1/_2\, AB$.

Рассуждения, приведенные в этом параграфе, показывают, что комплекс инструментов циркуль — орициркуль достаточен для решения всех конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского.

Ростовский государственный университет им. В. М. Молотова

Поступило 18 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. С. Смогоржевский, Наук. зап. Київськ. держ. ун-та, 7, 4, 151 (1948). [2] В. Ф. Рогаченко, ДАН, 88, № 4 (1953). [3] Н. М. Нестерович, Геометрические построения в плоскости Лобачевского, 1951. [4] Mascheroni, La geometria del compasso, 1797. [5] В. Ф. Каган, Основания геометрии, 1, 1949. [6] А. С. Смогоржевский, Геометрические построения в плоскости Лобачевского, 1951.