Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

ГИДРАВЛИКА

Н. Н. ВЕРИГИН

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКВАЖИН ПРИ ЗАКОНТУРНОМ ЗАВОДНЕНИИ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 V 1953)

Для внеконтурного заводнения нефтяных месторождений в условиях водонапорно-упругого их режима представляет интерес следующая задача (см. рис. 1). В круговом нефтяном пласте действуют m эксплуатационных скважин, расположенных на равных расстояниях друг от друга по окружности радиуса ρ_1 и имеющих дебит $Q_э$; в зоне краевой воды, окружающей нефтяной пласт, действуют m нагнетательных (инжекционных) скважин, расположенных на равных расстояниях по концентрической окружности радиуса ρ_2 и имеющих дебит $Q_н$; эксплуатационные и нагнетательные скважины находятся на одних и тех же радиусах, проведенных из центра окружностей s, и полностью вскрывают всю мощность пласта H; все скважины начинают действовать одновременно в момент времени $t = 0$. Требуется выяснить изменение давления в нефтяном пласте и перемещение границы краевой воды с течением времени.

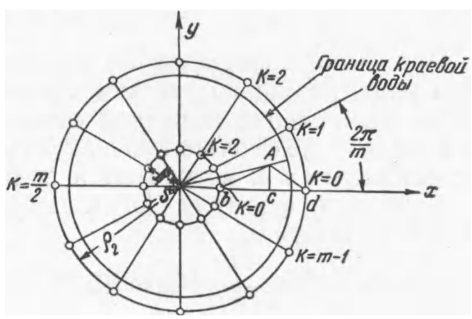

Рис. 1. $Ab = r_k$, $Ad = \rho_k$, $sb = \rho_1$, $sd = \rho_2$, $As = R$, $\angle csA = \theta$

Возникающее в таких условиях движение двух жидкостей описывается уравнением Фурье [1-3]. Допустим, что различием плотности, а также вязкости нефти и воды можно пренебречь и заменим эксплуатационные и нагнетательные скважины постоянно действующими точечными источниками интенсивностью, соответственно, $-Q_э/2\pi$ и $+Q_н/2\pi$.

Тогда решение поставленной задачи можно записать в виде

$$P = P_0 - \frac{1}{4\pi kH}\left[Q_н \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{Ei}\left(-\frac{\rho_k^2}{4at}\right) - Q_э \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_k^2}{4at}\right)\right], \tag{1}$$

где

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x}\,dx = 0{,}577 + \ln(-x) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p \cdot p!} \quad (x < 0). \tag{2}$$

Здесь P_0 — начальное давление в пласте в т/м²; m — мощность пласта в м; k — его коэффициент фильтрации в м/сек; t — время в сек.; P — давление в произвольной точке нефтяного пласта или зоны краевой воды A (рис. 1) в т/м²; a — коэффициент пьезопроводимости в м²/сек., ρ_k и r_k — расстояния от точки A, соответственно, до положительного источника номер k и до отрицательного источника номер k (рис. 1).

Величины ρ_k и r_k, как видно из треугольников Acd и Acb (рис. 1), выражаются следующим образом:

$$\rho_k^2 = \left[R \sin\left(\frac{2\pi k}{m} - \theta\right)\right]^2 + \left[\rho_2 - R\cos\left(\frac{2\pi k}{m} - \theta\right)\right]^2 = \\ = \rho_2^2 - 2R\rho_2 \cos\left(\frac{2\pi k}{m} - \theta\right) + R^2; \quad (3)$$

$$r_k^2 = \left[R \sin\left(\frac{2\pi k}{m} - \theta\right)\right]^2 + \left[\rho_1 - R\cos\left(\frac{2\pi k}{m} - \theta\right)\right]^2 = \\ = \rho_1^2 - 2R\rho_1 \cos\left(\frac{2\pi k}{m} - \theta\right) + R^2, \quad (4)$$

где R и θ — соответственно, радиус-вектор и полярный угол произвольной точки A. Конечные суммы функций $\mathrm{Ei}(x)$, входящие в (1), могут быть вычислены с помощью следующей формулы, найденной мною посредством подстановки в выражение этих сумм ряда (2):

$$\sum_{h=0}^{\infty} \mathrm{Ei}(x_k) = \sum_{h=0}^{m-1} \mathrm{Ei}\left[-\left(\xi^2 - 2\xi\eta\cos\frac{2\pi k}{m} + \eta^2\right)\right] = \\ = \ln(\xi^m - \eta^m)^2 - m\{\ln(\xi^2+\eta^2) - \mathrm{Ei}[-(\xi^2+\eta^2)] - R(\xi, \eta)\}, \quad (5)$$

где

$$R(\xi, \eta) = \xi^2\eta^2\{1 - {}^2/_3(\xi^2+\eta^2) + {}^1/_4(\xi^2+\eta^2)^2 + {}^1/_{16}\xi^2\eta^2 - \\ - {}^1/_{60}[4(\xi^2+\eta^2)^2 + 3\xi^2\eta^2]\}. \quad (6)$$

При выводе формулы (5) использованы 5 первых членов бесконечного ряда, стоящего третьим слагаемым в выражении (2), что обеспечивает вычисление конечной суммы (5) при значениях ее аргумента x_k от 0 до $-1{,}5$ с точностью до 2,25% (значения $|x_k| > 1{,}5$ соответствуют весьма малым t и встречаются редко).

Применяя формулу (5) к выражению (1) для точек на прямой sd ($\theta = 0$), получим:

$$P = P_0 - \frac{1}{4\pi kH}\{Q_н \ln[(\xi_2)^m - (\eta)^m]^2 - Q_э \ln[(\xi_1)^m - (\eta)^m]^2 + \\ + Q_н m[\ln\alpha - \mathrm{Ei}(-\alpha) - R(\alpha, \gamma)] - Q_э m[\ln\beta - \mathrm{Ei}(-\beta) - R(\beta, \delta)]\}, \quad (7)$$

где

$$\xi_2 = \frac{\rho_2}{2\sqrt{at}}; \quad \xi_1 = \frac{\rho_1}{2\sqrt{at}}; \quad \eta = \frac{R}{2\sqrt{at}}; \quad (8)$$

$$\alpha = \xi_2^2 + \eta^2; \quad \beta = \xi_1^2 + \eta^2; \quad \gamma = \xi_2^2\eta^2 = (\alpha - \eta^2)\eta^2; \ \delta = \xi_1^2\eta^2 = (\beta - \eta^2)\eta^2; \quad (9)$$

$$R(\alpha, \gamma) = \gamma[1 - {}^2/_3\alpha + {}^1/_4\alpha^2 + {}^1/_{16}\gamma - {}^1/_{60}\alpha(4\alpha^2 + 3\gamma)]; \\ R(\beta, \delta) = \delta[1 - {}^2/_3\beta + {}^1/_4\beta^2 + {}^1/_{16}\delta - {}^1/_{60}\beta(4\beta^2 + 3\delta)]. \quad (10)$$

Если $Q_н = Q_э = Q_0$, то вместо (7) будет:

$$P = P_0 - \frac{Q_0}{4\pi kH}\left\{\ln\left[\frac{1 - (\rho_2/R)^m}{1 - (\rho_1/R)^m}\right]^2 - mT(\alpha, \beta, \eta),\right. \quad (11)$$

где

$$T(\alpha, \beta, \eta) = \ln\frac{\alpha}{\beta} - \mathrm{Ei}(-\alpha) + \mathrm{Ei}(-\beta) - R(\alpha, \gamma) + R(\beta, \delta). \quad (12)$$

Здесь α, β, γ и δ выражаются по (8), (9), а $R(\alpha, \gamma)$ и $R(\beta, \delta)$ — по (10). Ввиду симметрии в размещении скважин выражение (7) определяет давление в пласте не только вдоль радиуса sd, но также вдоль любого радиуса, проведенного из центра окружностей к скважинам.

Для важнейших частных случаев из (11) получаем:

1) Давление в центре нефтяного пласта. При $R=0$ из (11) или (1) и (3) — (4) имеем:

$$P_s = P_0 - \frac{Q_0 m}{4\pi kH}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{\rho_2^2}{4at}\right) - \mathrm{Ei}\left(\frac{\rho_1^2}{4at}\right)\right]. \tag{13}$$

2) Забойное давление в эксплуатационных скважинах. Принимая в (11) $R=\rho_1+r_1$, где r_1 — радиус эксплуатационных скважин, и имея в виду, что $r_1 \ll \rho_1$, находим:

$$P_э = P_0 - \frac{Q}{4\pi kH}\left[2\ln\left\{1+\frac{\rho_1}{mr_1}\left[1+\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^m\right]\right\} - mT_э(\alpha, \beta)\right], \tag{14}$$

где $T_э(\alpha, \beta)$ находится из (12) при значениях $R(\alpha, \gamma)$ и $R(\beta, \delta)$ по (10), причем величины α, β, γ и δ выражаются так:

$$\alpha = \frac{\rho_2^2+\rho_1^2}{4at}; \quad \beta = \frac{\rho_1^2}{2at}; \; \gamma = \left(\frac{\rho_2\rho_1}{4at}\right)^2 = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\frac{\beta}{2}; \quad \delta = \left(\frac{\rho_1^2}{4at}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4}. \tag{15}$$

При большом m или $\rho_2 \gg \rho_1$ второе слагаемое в правой части (14) преобразуется следующим образом:

$$2\ln\left\{1+\frac{\rho_1}{mr_1}\left[1+\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^m\right]\right\} \cong 2\left[m\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \ln\frac{\rho_1}{mr_1}\right]. \tag{16}$$

3) Забойное давление в нагнетательных скважинах. Полагая в (11) $R=\rho_2+r_2$, где r_2 — радиус нагнетательных скважин, и имея в виду, что $r_2 \ll \rho_2$, найдем:

$$P_н = P_0 + \frac{Q}{4\pi kH}\left[2\ln\left\{1+m\frac{\rho_2}{r_2}\left[1-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^m\right]\right\} + mT_н(\alpha, \beta)\right], \tag{17}$$

где $T_н(\alpha, \beta)$ находится из (12) при следующих значениях α, β, γ и δ:

$$\alpha = \frac{\rho_2^2}{2at}; \quad \beta = \frac{\rho_2^2+\rho_1^2}{4at}; \quad \gamma = \left(\frac{\rho_2^2}{4at}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}; \quad \delta = \left(\frac{\rho_2\rho_1}{4at}\right)^2 = \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\alpha}{2}. \tag{18}$$

При большом m или $\rho_2 \gg \rho_1$ второе слагаемое в правой части (17) видоизменяется таким образом:

$$2\ln\left\{1+m\frac{\rho_2}{r_2}\left[1-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^m\right]\right\} \cong 2\ln\left(1+m\frac{\rho_2}{r_2}\right) \cong 2\ln\frac{\rho_2}{r_2}m. \tag{19}$$

При $t=\infty$ функция T в уравнениях (11), (14) и (17) обращается в нуль, и мы получаем решение данной задачи для установившегося режима фильтрации. Имея в виду, что радиусы sd во все время движения являются линиями тока, найдем скорость перемещения краевой воды вдоль этих радиусов:

$$v_R = n_0\frac{dR}{dt} = -\frac{k}{\gamma_0}\frac{\partial P}{\partial R}, \tag{20}$$

где γ_0 — удельный вес нефти (воды) при атмосферном давлении в т/м^3; n_0 — пористость породы и P — давление в пласте, выражающееся равенством (7) или (11).

Уравнение (20) можно интегрировать численными методами, что позволяет найти расстояние контура нефтеносности от эксплуатационных скважин для любого момента времени t.

На основе принципа суперпозиции течений мною разработан прием, позволяющий получить решение рассматриваемой задачи для случая, когда дебит скважин изменяется в процессе эксплуатации месторождения. Если, например, в момент времени t_1 дебит эксплуатационных и нагнетательных скважин мгновенно изменен от величины Q_0 до величины Q_1, то вместо (11) будет:

$$P = P_0 - \frac{Q_1}{4\pi kH} \ln \left[\frac{1-(\rho_2/R)^m}{1-(\rho_1/R)^m} \right]^2 + \\ + \frac{m}{4\pi kH} \left[Q_0 T(\alpha, \beta, \eta) - (Q_0 - Q_1) T(\alpha_1, \beta_1, \eta_1) \right], \tag{21}$$

где $T(\alpha, \beta, \eta)$ определяется из (12) при значениях η, α, β, γ и δ по (8), (9), а $T(\alpha_1, \beta_1, \eta_1)$ находится также из (12), но при следующих значениях α, β, η:

$$\alpha_1 = \frac{\rho_2^2 + R^2}{4a(t-t_1)}; \quad \beta_1 = \frac{\rho_1^2 + R^2}{4a(t-t_1)}; \quad \eta_1 = \frac{R}{2\sqrt{a(t-t_1)}}. \tag{22}$$

При этом величины γ и δ, входящие в (12), будут равны:

$$\gamma_1 = (\alpha_1 - \eta_1^2)\eta_1^2; \quad \delta_1 = (\beta_1 - \eta_1^2)\eta_1^2. \tag{23}$$

Выражение (21) удовлетворяет уравнению Фурье и начальному условию (11); последнее вытекает из того, что при $t = t_1$ равенство (21) переходит в (11).

По аналогии с (21) после n мгновенных изменений дебита скважин давление P будет:

$$P = P_0 - \frac{Q_n}{4\pi kH} \ln \left[\frac{1-(\rho_2/R)^m}{1-(\rho_1/R)^m} \right]^2 + \\ + \frac{m}{4\pi kH} \left[Q_0 T(\alpha, \beta, \eta) - \sum_{k=1}^{n} (Q_{k-1} - Q_k) T(\alpha_k, \beta_k, \eta_k) \right], \tag{24}$$

где $T(\alpha_k, \beta_k, \eta_k)$ выражается по (12) при значениях α, β, η, γ и δ в соответствии с (22) и (23).

Подобным образом можно изучать движение нефти и воды при любом наперед заданном режиме эксплуатации месторождения, что представляет особый интерес для практики. В частности, может быть исследован режим практически постоянного во времени забойного давления в скважинах, а также случай, когда заводнение начинается после более или менее длительной эксплуатации месторождения.

На основании принципа суперпозиции по аналогии с уравнением (7) или (11) можно получить решение для любого конечного числа кольцевых батарей эксплуатационных и нагнетательных скважин.

При существенном различии вязкости и плотности участвующих в движении жидкостей решение данной задачи будет иным. В этом случае на границе раздела жидкостей должны быть приняты краевые условия особого типа, рассмотренные в ([4]).

Поступило
11 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Щелкачев, ДАН, 62, № 2 (1946). [2] В. Н. Щелкачев, ДАН, 89, № 4 (1951). [3] М. Маскет, Течение однородных жидкостей в пористой среде, М.—Л., 1949. [4] Н. Н. Веригин, Изв. АН СССР, ОТН, в. 5 (1952).