

Б. В. РАУШЕНБАХ

ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАНИИ РЕЛЕЯ, СВЯЗАННОМ
С ТЕРМИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ ЗВУКА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 4 VI 1953)

1. В ряде работ Релей (¹) высказал предположение, что при анализе причин термического возбуждения звука главным является вопрос о соотношении между фазой передачи тепла и фазой колебания. При этом он указал, что колебания будут усиливаться, если тепло сообщается в момент наибольшего сжатия и отнимается в момент наибольшего разрежения.

В последнее время это положение Релея стали часто применять при анализе возбуждения акустических колебаний в трубах (^{2,3}). Между тем некритическое использование замечания Релея может привести к ошибочным результатам, поскольку условия возбуждения звука более сложны.

2. Рассмотрим колебания газа, движущегося в трубе. Пусть в некотором сечении трубы к газу подводится тепло. Примем, что слева и справа от неподвижной плоскости подвода тепла Σ расположены узлы скорости или давления. При этих предположениях легко убедиться в том, что стоячие волны в обеих половинах трубы дадут сдвиг фаз между колебанием давления и скорости, равный $\pi/2$, если только эти колебания нейтральны, т. е. не затухают или не возрастают. Назовем такие колебания соответствующими границе устойчивости, поскольку в этом случае сколь угодно малое изменение закона тепловыделения приведет, вообще говоря, либо к затуханию колебаний (устойчивость), либо к их возрастанию (неустойчивость).

Поставим вопрос о характере тепловыделения, необходимом для существования режима нейтральных колебаний (границы устойчивости). Написав в предположении малости (линейности) возмущений условия сохранения массы, импульса и энергии; воспользовавшись условием изоэнтропичности для газа, не пересекавшего сечения Σ , и сохранив в уравнениях лишь возмущения скорости \mathbf{v} и давления p , придем к системе уравнений, связывающих колебания слева и справа на плоскости подвода тепла Σ :

$$\begin{aligned} p_2 &= a_{11}p_1 + a_{12}v_1 + a_{13}q, \\ v_2 &= a_{21}p_1 + a_{22}v_1 + a_{23}q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь индекс 1 относится к газу до подогрева, индекс 2 — после подогрева; коэффициенты a_{ik} зависят от параметров установившегося процесса (без колебаний); p — возмущение давления; v — возмущение скорости; q — возмущение теплоподвода.

Так как p , v и q совершают гармонические колебания, то эти колебания можно представить как результат проектирования соосно вращающихся векторов p , v и q на некоторое направление.

По условию, на границе устойчивости вектора p и v должны быть взаимно-перпендикулярны: $p_1 v_1 = 0$; $p_2 v_2 = 0$. Очевидно, что коэффициенты преобразования (1), вообще говоря, не дадут $p_2 v_2 = 0$ при $p_1 v_1 = 0$ и $q = 0$. Отсюда сразу следует условие существования нейтральных колебаний (границы устойчивости):

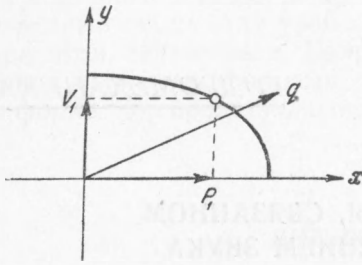


Рис. 1. Связь между векторами p_1 и v_1 . Вектор q может иметь произвольную величину и направление

В момент перехода к возбуждению колебаний (или обратно) вектор теплоподвода q должен быть таким, чтобы из ортогональности $p_1 v_1 = 0$ следовала ортогональность $p_2 v_2 = 0$.

3. Пусть рассматривается наиболее общий случай, когда газ, движущийся по трубе, имеет различную температуру до и после пересечения плоскости подвода тепла Σ . Поставим вопрос о необходимых для режима нейтральных колебаний значениях вектора q . Поскольку при переходе через Σ p и v изменяются (в том числе и по фазе), условимся, говоря о сдвиге q по фазе, определять ее относительно p_1 и v_1 . Условимся, далее, считать, что в рассматриваемый момент вектор p_1 направлен вправо (по оси x), а вектор v_1 вверх (по оси y) и будем наносить вектор q на ту же плоскость (x, y) . Тогда взаимное расположение векторов p_1 , v_1 и q даст наглядное представление о сдвиге между ними по фазе и об их относительных величинах (рис. 1).

Взяв скалярное произведение равенств (1) друг на друга и учтя условия ортогональности $p_1 v_1 = 0$, $p_2 v_2 = 0$, сразу получим:

$$A p_1 q_x + B v_1 q_y + C (q_x^2 + q_y^2) + D p_1^2 + E v_1^2 = 0, \quad (2)$$

где A, B, C, D, E — некоторые постоянные.

Легко видеть, что при постоянных p_1 и v_1 уравнение (2) указывает на движение кончика вектора q по окружности в системе координат (x, y) . Отсюда следует, что: 1) множество векторов q , возбуждающих звуковые колебания, отделяется от всех остальных на плоскости (x, y) годографом, имеющим форму окружности, положение центра которой зависит от p_1 и v_1 ; 2) различным положениям плоскости Σ по длине трубы (различным p_1 и v_1) могут соответствовать различные вектора q , т. е. условия, необходимые для термического возбуждения звука, могут изменяться при изменении положения Σ .

Поскольку при перемещении плоскости Σ вдоль трубы амплитуды стоячих волн p_1 и v_1 будут изменяться, рассмотрим характер этого изменения. Можно показать, что для любого сечения трубы справедливо равенство

$$\left| \frac{v_1}{c} + \frac{p_1}{kP} \right| = \text{const},$$

где c — скорость звука, k — показатель адиабаты, P — давление.

Из написанного соотношения сразу следует, что

$$\frac{v_1^2}{c^2} + \frac{p_1^2}{k^2 P^2} = \text{const},$$

т. е. в рассматриваемом случае (с учетом условия о направлениях \mathbf{p}_1 и \mathbf{v}_1) точки с координатами (p_1, v_1) лягут в системе координат (x, y) на дугу эллипса в первой четверти (рис. 1).

Возвращаясь к равенству (2), можно утверждать, что все множество значений q , которые возбуждают колебания, отделяются от остальных годографом, являющимся огибающей семейства окружностей с центрами, расположенными по четверти дуги эллипса. Более подробный анализ показывает, что эта дуга лежит в четвертой четверти, а радиусы окружностей меньше расстояний от их центров до начала координат.

Схематическое построение, соответствующее разобранным случаю, дано на рис. 2а. Область значений q , при которых возможно возбуждение звука, заштрихована. Часть этой области, принадлежащая всем окружностям семейства, заштрихована в клетку. Последняя область соответствует таким значениям q , при которых колебания могут возбуждаться вне зависимости от положения Σ по длине трубы.

В том случае, если разница в температуре газа слева и справа от Σ невелика (трубка Рийке) и при теоретическом анализе может быть принята одинаковой, коэффициенты D и E в уравнении (2) обращаются в нуль. Тогда все окружности рассматриваемого семейства проходят через начало координат, что дает диаграмму, изображенную на рис. 2б.

Если в стационарных условиях газ неподвижен, то система (1) приобретает простейший вид:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1; \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \frac{k-1}{k\rho} \mathbf{q}.$$

Так как в этом случае при $q = 0$ из условия $\mathbf{p}_1 \mathbf{v}_1 = 0$ следует $\mathbf{p}_2 \mathbf{v}_2 = 0$, то существование режимов нейтральных колебаний возможно лишь при параллельности \mathbf{v}_1 и \mathbf{q} . Это дает диаграмму рис. 2в.

4. Из диаграммы рис. 2а можно сделать неправильный вывод, что для возбуждения звука с самого начала необходимы конечные значения колеблющегося тепловыделения. Однако из равенства (2) видно, что величина q пропорциональна p_1 и v_1 , которые, как известно, принимаются в начальный момент сколь угодно малыми. Следовательно, на диаграммах вектор q дает относительную амплитуду колеблющейся составляющей теплоподвода.

5. Возвращаясь к замечанию Релея об условиях термического возбуждения звука, можно заключить, что в общем он был прав, говоря о важности соотношения между фазой подвода тепла и фазой колебания. Преимущественное расположение областей неустойчивости в правой полуплоскости диаграмм говорит и о том, что возбуждение звука при совпадении фаз колебания давления и теплоподвода особенно вероятно. Однако эти общие соображения требуют следующего уточнения:

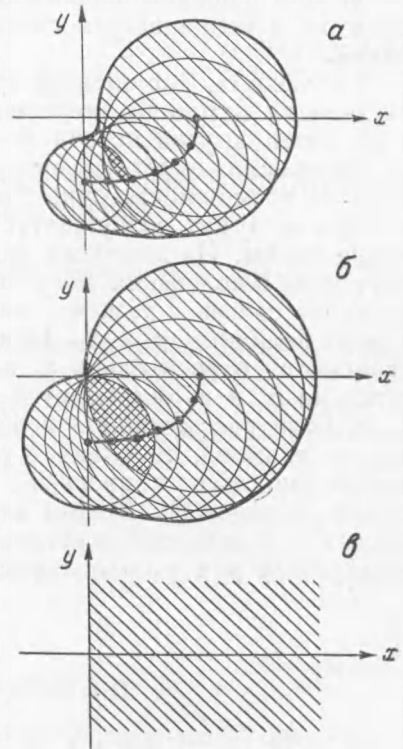


Рис. 2. При положении кончика вектора q в заштрихованной области возможно возбуждение звука. На рисунках показаны семейства окружностей (и их центры); соответствующие уравнению (2)

а) В зависимости от условий (положения Σ по длине трубы, параметров стационарного течения) возбуждение колебаний может быть получено не только при совпадении или близости фаз теплоподвода и давления, но и при существенных сдвигах между ними (вплоть до сдвига равного π); это подтверждается прямыми расчетами.

б) Возбуждение звука невозможно лишь при положениях вектора q во второй четверти (между фазой скорости и противофазой давления).

в) При решении вопроса о возбуждении звука важна не только фаза, но и величина относительной амплитуды колебаний тепловыделения.

Неточность, допущенная Релеем, связана с тем, что им был учтен лишь один источник энергии для возбуждения колебаний — тепловой, и не учтен другой источник — кинетическая энергия потока.

Интересно отметить еще два обстоятельства. Диаграммы указывают на возможность существования таких значений q , при которых колебания будут возбуждаться при любом положении плоскости Σ по длине трубы. Из диаграмм видно также, что при достаточно больших значениях q колебания могут перестать возбуждаться. Этот кажущийся парадокс связан с тем, что на приведенных здесь диаграммах не показаны величины p_2 и v_2 . При достаточно больших q фазы p_2 и v_2 сдвигаются относительно p_1 и v_1 так, что положение вектора q относительно p_2 и v_2 оказывается неблагоприятным.

б. Если рассматривать возбуждение звуковых колебаний поверхностью пламени, то следует учитывать колеблющиеся составляющие массы, импульса и энергии, возникающие вследствие подвижности фронта пламени (4). В этом случае также возможно получение аналогичных условий возбуждения колебаний, исходя из требования ортогональности p и v по обе стороны поверхности подвода тепла.

Поступило
27 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Релей, Теория звука, 2, 1944. ² G. H. Markstein, J. of the Aeronaut. Sci., 18, 428 (1951). ³ A. A. Putnam, W. R. Dennis, Trans. ASME. 1, 75, 15 (1953). ⁴ Б. В. Раушенбах, ЖТФ, 23, 358 (1953).