

Ю. Ф. МОРОШКИН

О ФОРМАХ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЕОМЕТРИИ МЕХАНИЗМОВ

(Представлено академиком И. И. Артоболевским 30 V 1953)

Настоящее исследование является развитием результатов, установленных в (1). Пусть $\{x_{ji}^{kh}\} = x_j^{kh}$; $\cos(x_{ji}, x_{hi}) = \alpha_{ij}^{(jh)}$; $\|\alpha_{ij}^{(jh)}\| = \alpha^{(jh)}$; ϵ — единичная матрица порядка 3 (фигурные скобки отличают матрицу-столбец). В остальном сохранена символика цитированной работы. Основными уравнениями геометрии механизмов являются уравнения

$$\alpha^{(0n)} = \prod_{v=1}^n \alpha^{(v-1, v)}, \quad (1)$$

$$x_0^{Kn} = \sum_{v=1}^n \left(\prod_{v'=0}^{v-1} \alpha^{(v'-1, v')} \right) x_{v-1}^{Kv} \quad (2)$$

($\alpha^{(-1, 0)} = \epsilon$). При этом для замкнутой цепи $\alpha^{(0n)} = \text{const}$, $x_0^{Kn} = \text{const}$. Уравнение (1) эквивалентно 9 скалярным уравнениям

$$\alpha_{i_0 i_n}^{(0n)} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \prod_{v=1}^n \alpha_{i_{v-1} i_v}^{(v-1, v)}, \quad (1')$$

$$i_0, \dots, i_n = 1, 2, 3,$$

а уравнение (2) — 3 скалярным уравнениям

$$x_{0i_0}^{Kn} = \sum_{v=1}^n \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_{v-1}} \left(\prod_{v'=0}^{v-1} \alpha_{i_{v'-1} i_{v'}}^{(v'-1, v')} \right) x_{v-1, i_{v-1}}^{Kv} \right\}, \quad (2')$$

$$i_0 = 1, 2, 3.$$

При этом число независимых уравнений системы (1'), (2') не больше 6. Заметим, что уравнения (1), (2) могут быть заменены уравнениями

$$\alpha^{(0k)} \equiv \prod_{v=1}^k \alpha^{(v-1, v)} = \prod_{v=n}^{k+1} \alpha^{(v, v-1)} \equiv \alpha^{(nk)}, \quad (3)$$

$$x_0^{Kk} \equiv \sum_{v=1}^k \left(\prod_{v'=0}^{v-1} \alpha^{(v'-1, v')} \right) x_{v-1}^{Kv} = \sum_{v=n}^{k+1} \left(\prod_{v'=n}^v \alpha^{(v'+1, v')} \right) x_v^{Kv-1} \equiv x_n^{Kk}, \quad (4)$$

$$0 < k < n$$

($\alpha^{(n+1, n)} = \epsilon$), которые в сравнении с уравнениями (1), (2) представляются более простыми. При этом необходимо соответствующим образом изменить транскрипцию уравнений последних $n - k$ кинемати-

ческих пар. Эквивалентные уравнениям (3), (4) скалярные уравнения имеют вид

$$\alpha_{i_0 i_k}^{(0k)} \equiv \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} \prod_{v=1}^k \alpha_{i_{v-1} i_v}^{(v-1, v)} = \sum_{i_{n-1}, \dots, i_{k+1}} \prod_{v=n}^{k+1} \alpha_{i_v i_{v-1}}^{(v, v-1)} \equiv \alpha_{i_n i_k}^{(nk)}, \quad (3')$$

$$i_0, \dots, i_n = 1, 2, 3; \quad 0 < k < n,$$

$$\begin{aligned} x_{0 i_0}^{K_k} &\equiv \sum_{v=1}^k \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_{v-1}} \left(\prod_{v'=0}^{v-1} \alpha_{i_{v'-1} i_{v'}}^{(v'-1, v')} \right) x_{i_{v-1}, i_{v-1}}^{K_v} \right\} = \\ &= \sum_{v=n}^{k+1} \left\{ \sum_{i_{n-1}, \dots, i_{k+1}} \left(\prod_{v'=n}^v \alpha_{i_{v'+1} i_{v'}}^{(v'+1, v')} \right) x_{i_v i_v}^{K_{v-1}} \right\} \equiv x_{i_n i_n}^{K_k}, \end{aligned} \quad (4')$$

$$i_0 = 1, 2, 3; \quad 0 < k < n.$$

В цитированной выше работе подчеркнуто, что существенным содержанием предложенного автором метода является применение уравнений преобразования. При этом уравнения кинематических пар оставляют независимыми некоторое число параметров, определяющих относительные движения звеньев системы. Уравнения Эйлера вместе с уравнениями кинематических пар позволяют исключить из уравнений преобразования все переменные за исключением названных параметров, играющих роль лагранжевых координат системы. В (1) детально исследована роль уравнений преобразования, являющихся основными уравнениями геометрии механизмов. Заметим, что составление уравнений кинематических пар не представляет затруднений, между тем как уравнения преобразования составляются автоматически.

Что касается формы уравнений преобразования, то эта последняя определяется выбором координат системы S_k в системе S_j , $j, k=0, \dots, n$. Уравнения (1), (2) составлены в предположении, что в качестве параметров, определяющих положение системы S_k в системе S_j , приняты точечные координаты $\alpha^{(jk)}$, $x_j^{K_k}$. Если, однако, положение системы S_k в системе S_j определено тангенциальными координатами (координатами Плюккера) $\mu^{(jk)}$, $\mu^{(jk)}$, где

$$\mu^{(jk)} = \left\| \mu_{i_j i_k}^{(jk)} \right\| = \begin{vmatrix} x_{j_2}^{K_k} \alpha_{31}^{(jk)} - x_{j_3}^{K_k} \alpha_{21}^{(jk)} & x_{j_2}^{K_k} \alpha_{32}^{(jk)} - x_{j_3}^{K_k} \alpha_{22}^{(jk)} & x_{j_2}^{K_k} \alpha_{33}^{(jk)} - x_{j_3}^{K_k} \alpha_{23}^{(jk)} \\ x_{j_3}^{K_k} \alpha_{11}^{(jk)} - x_{j_1}^{K_k} \alpha_{31}^{(jk)} & x_{j_3}^{K_k} \alpha_{12}^{(jk)} - x_{j_1}^{K_k} \alpha_{32}^{(jk)} & x_{j_3}^{K_k} \alpha_{13}^{(jk)} - x_{j_1}^{K_k} \alpha_{33}^{(jk)} \\ x_{j_1}^{K_k} \alpha_{21}^{(jk)} - x_{j_2}^{K_k} \alpha_{11}^{(jk)} & x_{j_1}^{K_k} \alpha_{22}^{(jk)} - x_{j_2}^{K_k} \alpha_{12}^{(jk)} & x_{j_1}^{K_k} \alpha_{23}^{(jk)} - x_{j_2}^{K_k} \alpha_{13}^{(jk)} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

то уравнение (2) будет заменено уравнением

$$\mu^{(0n)} = \sum_{v=1}^n \left(\prod_{v'=0}^{v-1} \alpha^{(v'-1, v')} \right) \mu^{(v-1, v)} \prod_{v'=v+1}^n \alpha^{(v'-1, v')}. \quad (6)$$

Уравнение (6) эквивалентно системе 9 скалярных уравнений

$$\mu_{i_0 i_n}^{(0n)} = \sum_{v=1}^n \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \left(\prod_{v'=0}^{v-1} \alpha_{i_{v'-1} i_{v'}}^{(v'-1, v')} \right) \mu_{i_{v-1} i_{v-1}}^{(v-1, v)} \prod_{v'=v+1}^n \alpha_{i_{v'-1} i_{v'}}^{(v'-1, v')} \right\}, \quad (6')$$

$$i_0, \dots, i_n = 1, 2, 3.$$

Если мы воспользуемся, наконец, дуальными плюккеровыми координатами

$$\tilde{\alpha}^{(jk)} = \alpha^{(jk)} + \iota \mu^{(jk)}, \quad (7)$$

где ι — символ Клиффорда, удовлетворяющий условию

$$\iota^2 = 0, \quad (8)$$

то будем иметь единственное дуальное уравнение преобразования

$$\tilde{\alpha}^{(0n)} = \prod_{\nu=1}^n \tilde{\alpha}^{(\nu-1, \nu)}, \quad (9)$$

являющееся непосредственным следствием уравнений А. П. Котельникова (2). Уравнение (9) эквивалентно 9 дуальным скалярным уравнениям

$$\tilde{\alpha}_{i_0 i_n}^{(0n)} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \prod_{\nu=1}^n \tilde{\alpha}_{i_{\nu-1} i_{\nu}}^{(\nu-1, \nu)}, \quad i_0, \dots, i_n = 1, 2, 3, \quad (9')$$

или 2 вещественным уравнениям (1), (6), или 18 вещественным скалярным уравнениям (1'), (6'). Заметим, что уравнение (9), полученное нами непосредственно из уравнений А. П. Котельникова, может быть истолковано и как результат сложения уравнения (1) с уравнением (6), умноженным на ι .

Необходимо иметь в виду, что если движение системы определено точечными координатами $\alpha^{(jk)}$, $x_j^{K_k}$, то роль основных уравнений геометрии механизмов играют уравнения преобразования точечных координат (1), (2), между тем как уравнение (6) является их следствием (к уравнению (6) мы могли бы прийти, умножая (2) векторно справа на $\alpha^{(0n)}$ и принимая во внимание, что $x_j^{K_k} \times \alpha^{(jk')} = \mu^{(jk)} \alpha^{(kk')}$). Напротив, при переходе к тангенциальным координатам $\alpha^{(jk)}$, $\mu^{(jk)}$ основными уравнениями следует считать уравнения преобразования тангенциальных координат (1), (6). Уравнение (2) будет тогда следствием этим двух. Уравнение (9) представляет предельно лаконичную форму основных уравнений геометрии механизмов.

Из изложенного видно, что уравнения (6') (или уравнение (6)) отнюдь не являются чем-то принципиально новым по отношению к уравнениям (2') (уравнению (2)). Это—уравнения, заменяющие уравнения (2') (уравнение (2)) в системе уравнений преобразования при переходе от точечных координат к тангенциальным. Если движение определено в точечных координатах, то уравнения (6') (уравнение (6)) являются лишь следствиями уравнений (2') (уравнения (2)). Как подчеркнуто в (1), то обстоятельство, что число уравнений системы (1'), (2') больше числа независимых уравнений этой системы, в максимальной степени облегчает исследование. Действительно, в каждом конкретном случае из уравнений системы остается выбрать наиболее простые. С этой точки зрения присоединение к уравнениям (1'), (2') уравнений (6'), представляющих собою следствия уравнений (1'), (2'), могло бы казаться практически целесообразным. Однако в действительности это не так. В самом деле, уравнения (6') представляются значительно более сложными, чем (2'), вследствие чего применение уравнений (6') в практике следует признать нецелесообразным. В теоретических исследованиях уравнения (2'), более простые и имеющие более простой, чем уравнения (6'), геометрический смысл, также приходится предпочесть уравнениям (6'). Заметим, что если в качестве координатных параметров системы приняты плюккеровы координаты

наты $\alpha^{(jk)}$, $\mu^{(jk)}$, то транскрипция уравнений кинематических пар должна быть соответствующим образом изменена.

Таким образом, уравнения преобразования, являющиеся основными уравнениями геометрии механизмов, могут быть составлены в той или иной форме — в форме уравнений скалярных или матричных (в частности — тензорных), вещественных или комплексных. Существенный смысл этих уравнений как уравнений преобразования остается при этом неизменным. Напротив, не все формы уравнений преобразования являются формами тензорными. Это относится, в частности, к форме (6), представляющей пример преобразования более сложного.

Поступило
19 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. Ф. Морошкин, ДАН, 82, № 4 (1952). ² А. П. Котельников, Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике, 1895.