Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИКА

В. А. ЧЕЧИК

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА С. А. ЧАПЛЫГИНА К ПРИБЛИЖЕННОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 8 IV 1953)

С. А. Чаплыгин предложил ([1]) метод приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод основан на применении теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах.

Н. Н. Лузин обосновал ([2]) сходимость метода Чаплыгина для случая обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и установил быстроту сходимости этого метода.

В дальнейшем метод Чаплыгина был применен Д. Ю. Пановым ([3]) и к решению интегральных уравнений.

В ([4]) Н. Н. Лузин формулирует проблему о развитии метода Чаплыгина для приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения 1-го порядка в частных производных

$$q = f(x, y, z, p), \tag{1}$$

где $p = \partial z / \partial x$, $q = \partial z / \partial y$, с начальным условием Коши

$$z(x, y_0) = \varphi(x). \tag{2}$$

В настоящей заметке мы приводим некоторые результаты, полученные в направлении решения этой проблемы.

Отметим, что для линейных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка справедливость теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах была показана Е. Ф. Саваренским ([5]).

Теорема 1. (О дифференциальных неравенствах). *Пусть $z = z(x, y)$ — решение уравнения* (1), *а $z = v(x, y)$ — решение уравнения*

$$q = f(x, y, z, p) + g(x, y), \tag{3}$$

удовлетворяющее условию (2).

Обозначим через D область в полуплоскости $y \geqslant y_0$, плоскости xOy, образованную проекциями характеристических кривых уравнения (3), *проходящих через точки $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y = y_0$, $z = \varphi(x)$.*

Тогда, если в области D функция $z(x, y)$ однозначна и выполнены условия: а) $f''_{p^2} \leqslant 0$ *и* б) $g(x, y) > 0$, *то во всех точках* (x, y) *этой области*

$$z(x, y) \leqslant v(x, y),$$

причем знак равенства достигается только при $y = y_0$.

Доказательство. В силу того, что

$$z(x, y_0) = v(x, y_0),$$

имеем

$$\frac{\partial z(x, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y_0)}{\partial x}.$$

Тогда

$$\frac{\partial v(x, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial z(x, y_0)}{\partial y} + g(x, y_0) > \frac{\partial z(x, y_0)}{\partial y},$$

откуда непосредственно следует, что при значениях $y \geqslant y_0$ и близких к y_0 поверхность $z = v(x, y)$ лежит над поверхностью $z = z(x, y)$.

Если поверхность $z = v(x, y)$ не лежит во всей области D над поверхностью $z = z(x, y)$, то найдется характеристическая кривая уравнения (3), определяемая системой

$$\frac{dx}{-f_{p_1}(x, y, v, p_1)} = \frac{dy}{1} = \frac{dv}{-p_1 f_{p_1}(x, y, v, p_1) + q_1} =$$

$$= \frac{dp_1}{p_1 f'_v + f'_x + g'_x} = \frac{dq_1}{q_1 f'_v + f'_y + g'_y} = dt, \qquad (4)$$

$(p_1 = \partial v / \partial x, \quad q_1 = \partial v / \partial y)$, проходящая через некоторую точку $x_0, y_0, \; z = \varphi(x_0) \; (x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2)$ и пересекающая в некоторой точке $x, y, z(x, y)$ поверхность $z = z(x, y)$.

Пусть точка x, y, z является первой точкой встречи характеристической кривой с поверхностью $z = z(x, y)$. Тогда угол между направлением характеристической кривой и нормалью к поверхности $z = z(x, y)$ в этой точке, направленной в сторону меньших z, будет не больше $\pi / 2$, т. е. скалярное произведение векторов $\{-f_{p_1}(x, y, z, p_1), 1, -pf_{p_1}(x, y, z, p_1) + q_1\}$ и $\{p, q, -1\}$ в точке x, y, z будет неотрицательно:

$$(p_1 - p) f'_{p_1}(x, y, z, p_1) + q - q_1 \geqslant 0.$$

Используя формулу Тейлора, последнее неравенство легко преобразовать к виду

$$-q(x, y) + f''_{p^2}(x, y, z, p_1 + \vartheta(p - p_1)) \frac{(p - p_1)^2}{2} \geqslant 0, \qquad (5)$$

где $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$.

Из (5) и б) следует $f''_{p^2} > 0$, что противоречит условию а).

Теорема доказана.

Эта теорема непосредственно обобщается на n переменных. При этом условие а) нужно заменить требованием отрицательной определенности квадратичной формы

$$\sum_{i, j=1}^{n} f''_{p_i p_j} \xi_i \xi_j.$$

Укажем алгорифм получения функций $v_n(x, y)$, мажорирующих искомое решение $z = z(x, y)$ уравнения (1) и приближающихся к $z(x, y)$ при возрастании n.

Пусть $v_n(x, y)$—функция, удовлетворяющая начальному условию (2) и такая, что

$$\frac{\partial v_n(x, y)}{\partial y} - f\left(x, y, v_n(x, y), \frac{\partial v_n(x, y)}{\partial x}\right) \geqslant 0, \tag{6}$$

причем знак равенства может достигаться только при $y = y_0$.

Ищем решение линейного уравнения

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial y} - f'_v\left(x, y, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}\right)\sigma_n - f'_p\left(x, y, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}\right)\frac{\partial \sigma_n}{\partial x} - \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} - f\left(x, y, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}\right)\right) = 0 \tag{7}$$

такое, что $\sigma_n(x, y_0) \equiv 0$, и определяем функцию $v_{n+1}(x, y)$ равенством

$$v_{n+1}(x, y) = v_n(x, y) - \sigma_n(x, y). \tag{8}$$

Очевидно, функция $v_{n+1}(x, y)$ также удовлетворяет условию (2).

Теорема 2. *Пусть квадратичная форма*

$$f''_{v^2}\xi^2 + 2f''_{vp}\xi\eta + f''_{p^2}\eta^2 \tag{9}$$

отрицательно определена при $y \geqslant y_0$.

Тогда

$$z(x, y) \leqslant v_{n+1}(x, y) \leqslant v_n(x, y),$$

причем знак равенства имеет место только при $y = y_0$.

Доказательство. Обозначим

$$\rho = v_n - \sigma_n - z. \tag{10}$$

Тогда нетрудно показать, что $\rho(x, y)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} - f'_v\left(x, y, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}\right)\rho - f'_p\frac{\partial \rho}{\partial x} = r(x, y), \tag{11}$$

удовлетворяющим нулевому начальному условию, где

$$r(x, y) = -\frac{1}{2}\left[f_{v^2}\left(x, y, v_n - \vartheta_1(v_n - z), \frac{\partial v_n}{\partial x} - \vartheta_2\frac{\partial(v_n - z)}{\partial x}\right)(v_n - z)^2 + 2f''_{vp}(v_n - z)\frac{\partial(v_n - z)}{\partial x} + f''_{p^2}\left(\frac{\partial(v_n - z)}{\partial x}\right)^2\right]; \quad 0 \leqslant \vartheta_1, \ \vartheta_2 \leqslant 1.$$

Решение уравнения (1) сводится к решению уравнения характеристик

$$\frac{dx}{-f'_p} = \frac{dy}{1} = \frac{d\rho}{r(x, y) + f'_v\rho} = dt$$

при начальных условиях $t = 0$, $x = u$, $y = y_0$, $\rho = 0$, где t, u — параметры.

Решая эту систему и учтя условие (9), получим

$$\exp\int_0^{y-y_0} f'_v d\alpha \cdot \int_0^{y-y_0} \exp\left(-\int_0^s f'_v d\alpha\right) r(x,y)\, ds \geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только при $y = y_0$.

Следовательно

$$z \leqslant v_n - \sigma_n.$$

Аналогично из (6) и (7) получим, что

$$\sigma_n(x, y) \geqslant 0.$$

Итак, мы получили

$$z_n(x, y) \leqslant v_n(x, y) - \sigma_n(x, y) \leqslant v_n(x, y),$$

причем равенство достигается только при $y = y_0$.

Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что функции $v_n(x, y)$ монотонно приближаются к $z(x, y)$. В случае, если $v_0(x, y)$ и $\partial v_0(x, y) / \partial x$ в некоторой конечной области D достаточно близки, соответственно, $z(x, y)$ и $\partial z(x, y) / \partial x$, то, повторяя, по существу, рассуждения Н. Н. Лузина(2), можно показать, что

$$\max_{(x, y) \in D} | v_n(x, y) - z(x, y) | < \frac{C}{2^{2^n}}, \tag{12}$$

где C — некоторое положительное число.

Если $f(x, y, v, \partial v / \partial x)$ ограничена сверху, а $f'_v(x, y, v, \partial v / \partial x)$ ограничена снизу в D, то оценка (12) справедлива независимо от величины разности $v_0(x, y) - z(x, y)$.

Поступило
12 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М., 1919; Собр. соч., 1, 1948, стр. 348—368. [2] Н. Н. Лузин, Тр. ЦАГИ, в. 141 (1932). [3] Д. Ю. Панов, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 6 (1934). [4] Н. Н. Лузин, Усп. матем. наук, 6, в. 6 (1951). [5] Е. Ф. Саваренский, ДАН, 51, № 4 (1946).