Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Г. СЛОБОДЯНСКИЙ

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРОБЛЕМЫ МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА К ПРОБЛЕМЕ МАКСИМУМА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 VI 1953)

Во многих линейных задачах, сводящихся к вариационным, для построения приближенного решения (1) и оценки его погрешности важное значение имеет определение двусторонних приближений для функционала, к проблеме минимума которого приводится данная задача. Для этого надо построить функционал, максимум которого равен минимуму данного функционала.

Для некоторых задач такое преобразование проблемы минимума к проблеме максимума давно известно (принцип дополнительной работы Кастильяно в теории упругости, метод Треффтца для первой граничной задачи теории потенциала). К. Фридрихсом дано преобразование проблемы минимума к проблеме максимума для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка и 1-й краевой задачи теории потенциала. При этом Фридрихс пользуется двумя способами, из которых первый основан на введении множителей Лагранжа, а второй на введении новых переменных (см. (2), гл. IV, § 9, п. 2).

На идее введения новых переменных, а именно на введении компонент напряжений вместо компонент смещений, основано также известное преобразование принципа минимума потенциальной энергии в принцип дополнительной работы Кастильяно в теории упругости.

В работах (3, 4) дано обобщение способа введения новых переменных на функционалы весьма общего вида

$$F_f^A(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int_\Omega F(u, u_x, \ldots) \, d\Omega - 2\int_\Omega fu \, d\Omega, \qquad (1)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots,$$

где $F(u, u_x, \ldots)$ — положительно-определенная квадратичная форма относительно переменных $u, u_x, \ldots$ и дано выражение для функционала H в явном виде для задач с различными краевыми условиями (H — искомый функционал, т. е. $\max H = \min F_f^A(u)$).

В приложениях, однако, часто встречаются задачи, когда $F(u, u_x, \ldots)$ не является положительно-определенной квадратичной формой относительно переменных $u, u_x, \ldots$. Этот случай должен быть рассмотрен особо. Настоящая заметка посвящена преобразованию проблемы минимума в проблему максимума в указанном случае.

1°. Пусть

$$Au = f, \tag{2}$$

где A — положительно-определенный оператор, определенный на линеале M в вещественном гильбертовом пространстве H, $u \in M$, f — заданный элемент из H.

Пусть, далее, элемент $u_0 \in M$ реализует минимум функционала

$$F_f^A(u) = (Au, u) - 2(f, u). \tag{3}$$

Положим, что

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i, \tag{4}$$

где A_i — самосопряженные положительные операторы, которые определены на линеалах M_i, включающих в себя линеал M, а один из операторов A_i — положительно-определенный.

Если $u_1, \ldots, u_m$ — элементы, принадлежащие линеалам $M_1, \ldots, M_m$, то имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} (A_i(u_0 - u_i), u_0 - u_i) > 0. \tag{5}$$

Левая часть в (5) достигает минимума при $u_1 = u_2 = \ldots = u_m = u_0$, и этот минимум равен нулю.

Прибавляя к левой части (5) и вычитая из нее величину $2(f, u_0)$, получим:

$$\sum_{i=1}^{m} (A_i(u_0 - u_i), u_0 - u_i) = F_f^A(u_0) + H^*(\sigma) > 0, \tag{6}$$

где обозначено

$$H^*(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} (A_i u_i, u_i) - 2\left(\sum_{i=1}^{m} A_i u_i - f, u_0\right). \tag{7}$$

Здесь через $\{\sigma\}$ обозначена совокупность элементов $\{u_i\}$.

Так как левая часть в (6) достигает минимума, равного нулю, при значениях $u_1 = \ldots = u_m = u_0$, то имеем

$$\min H^*(\sigma) = -F_f^A(u_0). \tag{8}$$

Далее, очевидно, что минимум $H^*(\sigma)$ не изменится, если наложим на u_i дополнительное условие

$$\sum_{i=1}^{m} A_i u_i - f = 0, \tag{9}$$

ибо условие (9) при $u_1 = \ldots = u_m = u_0$ переходит в уравнение $Au_0 = f$, которое, мы считаем, имеет место.

При выполнении условия (9) второй член в правой части (7) равен нулю, и мы приходим к следующему выводу:

Теорема 1. *Минимум функционала*

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} (A_i u_i, u_i), \tag{10}$$

где $u_i \in M_i$ *удовлетворяют условию* (9), *равен* $-F_f^A(u_0)$, *т. е.*

$$\min H(\sigma) = -F_f^A(u_0). \tag{11}$$

2°. В частности, можно положить

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 u = Au - cu, \quad A_2 u = cu, \quad c < \lambda_1 \tag{12}$$

где c — постоянное число, λ_1 — наименьшее собственное значение оператора.

В качестве постоянной величины c можно взять весьма грубое приближение снизу для первого собственного значения оператора A, которое во многих задачах нетрудно определить.

В рассматриваемом случае из (9) и (10) следует

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^{2} (A_i u_i, u_i) = (Au_1 - cu_1, u_1) + c(u_2, u_2), \tag{13}$$

где

$$Au_1 - cu_1 + cu_2 = f, \tag{14}$$

или

$$H(\sigma) = (Au_1 - cu_1, u_1) + \frac{1}{c} \| f - Au_1 + cu_1 \|.$$

3°. Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения $2m$-го порядка

$$Au = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right] = f(x), \tag{15}$$

$$\begin{aligned} u(a) = \ldots = u^{(m-1)}(a) = 0, \\ u(b) = \ldots = u^{(m-1)}(b) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Положим

$$A = \sum_{k=0}^{m} A_k, \quad A_k u_k = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u_k}{dx^k} \right]. \tag{17}$$

Если $p_k(x) > c_k > 0$, то оператор A_k, как известно, положительно-определенный, и

$$\begin{aligned} (A_k u_k, u_k) &= \int_a^b u_k (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u_k}{dx^k} \right] dx = \\ &= \int_a^b p_k(x) \left(\frac{d^k u_k}{dx^k} \right)^2 dx > 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где функции $u_k(x)$ удовлетворяют краевым условиям

$$u_k'(a) = \ldots = u_k^{(k-1)}(a) = 0, \quad u_k'(b) = \ldots = u_k^{(k-1)}(b) = 0. \tag{19}$$

Из (9) и (10), принимая во внимание (17) и (18), получим

$$H(\sigma) = \int_a^b \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k u_k}{dx^k} \right)^2 dx, \tag{20}$$

$$\sum (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u_k}{dx^k} \right] = f(x). \tag{21}$$

Функционал $F_f^A(u)$ в рассматриваемой задаче, как известно, имеет вид ([5]):

$$F_f^A(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 \right\} dx - 2 \int_a^b f(x)\, u\, dx. \qquad (22)$$

На основании доказанной теоремы $\min H(\sigma) = -F_f^A(u_0)$.

Если $p_k(x)$ принимают как положительные, так и отрицательные значения на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ и если оператор A положительно-определенный, где

$$(Au, u) = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 \right\} dx, \qquad (23)$$

то для построения функционала H можно воспользоваться выводами 2° (формулы (12) — (14)).

Поступило
3 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Слободянский, Прикладн. матем. и мех., 16, в. 4 (1952). [2] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, (1934). [3] М. Г. Слободянский, Прикладн. матем. и мех., 17, в. 2 (1953). [4] М. Г. Слободянский, ДАН, 89, № 2 (1953). С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, 1950.