Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. Н. РАХМАНОВ

К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 26 V 1953)

§ 1. Введем следующие определения:

1. Пусть имеем некоторую односвязную область комплексной плоскости w, содержащую точку $w=0$ и не содержащую точки $w=\infty$. Такую область назовем областью вида P_α, если через каждую точку границы области можно провести прямую, образующую с положительным направлением вещественной оси один и тот же угол α $(0<\alpha<\pi)$ так, что на этой прямой находится единственная точка границы.

2. Пусть некоторая ограниченная односвязная область комплексной плоскости w симметрична относительно вещественной оси и содержит точку $w=0$. Такую область назовем областью вида L_α^2, если каждую точку области, лежащую в верхней полуплоскости, можно соединить с некоторой точкой отрезка вещественной оси, расположенного в области, отрезком прямой, полностью содержащимся в области и образующим с положительным направлением вещественной оси один и тот же угол α $(0<\alpha<\pi)$.

3. Рассмотрим некоторую односвязную бесконечную симметричную относительно вещественной оси область комплексной плоскости w, содержащую точку $w=0$ и не содержащую точку $w=\infty$, с границей, пересекающей вещественную ось в точке $-a$ $(a>0)$. Такую область назовем областью вида $L_{\alpha\infty}^2$, если каждую точку области, лежащую в верхней полуплоскости, можно соединить прямолинейным отрезком, полностью содержащимся в области, с некоторой точкой интервала вещественной оси $-a<x<\infty$, и все отрезки, соединяющие точки области с точками вещественной оси, образуют один и тот же угол α $(0<\alpha<\pi)$ с положительным направлением вещественной оси.

4. Рассмотрим некоторую односвязную бесконечную область комплексной плоскости w, симметричную относительно начала координат, содержащую вещественную ось. Такую область назовем областью вида $L'_{\alpha\infty}$, если на каждой прямой, пересекающей вещественную ось под одним и тем же углом α $(0<\alpha<\pi)$, находятся только две граничные точки области.

Кроме того, предположим, что все границы рассматриваемых областей являются замкнутыми жордановыми кривыми, а в случае областей P_α, $L_{\alpha\infty}^2$, $L'_{\alpha\infty}$ — замкнутыми жордановыми кривыми расширенной плоскости, проходящими через бесконечно удаленную точку. Пусть функции $\varphi_k(z)$, $\omega_k(z)$, $F_k(z)$, $k=1,2,\ldots n$, непрерывны в обобщенном смысле (с учетом бесконечно далекой точки) в $|z|\leqslant 1$ и $\varphi_k(z)$, $\omega_k(z)$ обращаются в ∞ в одной из точек окружности $|z|=1$, а функции $F_k(z)$ — в двух точках этой окружности, и все эти функции являются аналитическими в $|z| \ll 1$ всюду, за исключением конечного числа граничных точек. Пусть функции $f_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ непрерывны в $|z| \leqslant 1$ и являются аналитическими в $|z| \ll 1$ всюду, за исключением конечного числа граничных точек Требование аналитичности на окружности $|z| = 1$ можно ослабить. Предположим, что функции $\varphi_h(z), f_k(z), \omega_k(z), F_k(z)$ взаимно—однозначно отображают окружность $|z| = 1$ на границы областей P_α, L^2_α, $L^2_{\alpha\infty}$, $L^1_{\alpha\infty}$, тогда функции $\varphi_k(z), f_k(z), \omega_k(z), F_h(z)$ однолистны в круге $|z| < 1$. Для упрощения будем считать, что рассматриваемые функции принадлежат к соответствующим классам, т. е.

$$\varphi_k(z) \in P_\alpha, \quad f_k(z) \in L^2_\alpha, \quad \omega_k(z) \in L^2_{\alpha\infty}, \quad F_k(z) \in L^1_{\alpha\infty}.$$

Пусть все эти функции нормированы, именно:

$$\begin{aligned} &\varphi_k(0) = f_k(0) = \omega_k(0) = F_k(0) = 0, \\ &\varphi'_k(0) = f'_k(0) = \omega'_k(0) = F'_k(0) = 1, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

На основании геометрических свойств рассматриваемых областей и достаточных условий однолистности [1] получаем следующие теоремы:

Теорема 1. *Если функции $\varphi_k(z) \in P_\alpha$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеют совпадающие полюса на окружности $|z| = 1$, то функция*

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(z)$$

однолистна в круге $|z| < 1$ и принадлежит к классу функции P_α.

Теорема 2. *Если функции $f_k(z) \in L^2_\alpha$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то функция*

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

однолистна в круге $|z| < 1$ и принадлежит к классу функций L^2_α.

Теорема 3. *Если функции $f_k(z) \in L^2_\alpha$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а функции $\omega_k(z) \in L^2_{\alpha\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то функция*

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{n+m} \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(z) + \sum_{k=1}^{m} \omega_k(z) \right], \quad m \geqslant 1,$$

однолистна в $|z| < 1$ и принадлежит к классу $L^2_{\alpha\infty}$.

Теорема 4. *Если функции $F_k(z) \in L^1_{\alpha\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то функция*

$$\Phi_4(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F_k(z)$$

однолистна в $|z| < 1$ и принадлежит к классу $L^1_{\alpha\infty}$.

Пусть функции

$$\psi_k(z) = a_{0k} + a_{1k} z + a_{2k} z^2 + \cdots; \quad a_{0k} < -a; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

непрерывны в обобщенном смысле в круге $|z| \leqslant 1$, являются аналитическими в $|z| \leqslant 1$, за исключением конечного числа точек на окружности $|z|=1$, обращаются в ∞ в точке $z=1$ и отображают взаимно-однозначно круг $|z|=1$ на жорданову кривую, являющуюся границей области $L^2_{\alpha\infty}$. Тогда:

Теорема 5. *Если функции $\psi_k(z)$, $k=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют всем поставленным условиям, то функция*

$$\Phi_5(z)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(z)$$

однолистна в $|z|<1$ и отображает единичный круг плоскости z на область с дополнением вида $L^2_{\alpha\infty}$.

Рассмотрим класс функций (Σ^2_α) вида:

$$F(z)=\frac{1}{z}+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots$$

однолистных и регулярных в $|z|<1$ за исключением простого полюса при $z=0$. Пусть эти функции являются аналитическими на окружности $|z|=1$, за исключением конечного числа точек, и непрерывными во всех точках окружности $|z|=1$. Предположим, кроме того, что эти функции отображают окружность $|z|=1$ на границу области L^2_α.

Теорема 6. *Если функции $F_k(z)\in\Sigma^2_\alpha$, $k=1,2,\ldots,n$, то функция*

$$\Phi_6(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F_k(z)$$

принадлежит к классу (Σ^2_α).

§ 2. Пусть функция

$$F(z)=\frac{1}{z}+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots$$

однолистна и регулярна в $|z|<1$, за исключением простого полюса при $z=0$, и отображает круг $|z|<1$ на область, дополнение к которой есть выпуклая область. Функции, удовлетворяющие этим условиям, будем считать принадлежащими к классу (Σ^2_0).

Теорема 7. *Если функция $F(z)\in\Sigma^2_0$, то функция*

$$\Phi_7(z)=\frac{1}{1-e^{i\alpha}}\left[F(z)+e^{i\alpha}zF'(z)\right],\quad 0<|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

однолистна в $|z|<1$, а функция

$$\Phi^*_7(z)=F(z)+zF'(z)$$

однолистна и регулярна в $|z|<1$.

Доказательство основывается на известной лемме [2]).

Теорема 8. *Если функция $F(z)\in\Sigma^2_b$, то функция*

$$\Phi_8(z)=\frac{F(e^{-i\alpha}z)-F(e^{i\alpha}z)}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}},\quad 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},$$

однолистно отображает круг $|z|<1$ на область с дополнением, звездообразным относительно точки $w=0$.

Доказательство следует непосредственно из геометрических соображений.

Теорема 9. *Если функция $F(z)=\frac{1}{z}+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots$ однолистна и регулярна в $|z|<1$, за исключением простого полюса в точке*

$z=0$, *и отображает круг* $|z|<1$ *на область плоскости* w *со звездообразным дополнением относительно точки* $w=0$, *то функция*

$$\Phi_9(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+F(z)\right)$$

однолистна в $|z|<1$.

Доказательство следует из оценки

$$|\arg zF(z)|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

полученной Г. М. Голузиным ([3]), и из геометрических соображений.

Поступило
22 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950. [2] Б. Н. Рахманов, ДАН, 78, № 2 (1951). [3] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 3 (45) 2 (1938).