Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. В. ПОПОВА

ОБ ИНТЕГРАЛАХ НЕКОТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОТОБРАЖАЮЩИХ ПОЛУПЛОСКОСТЬ НА ОБЛАСТЬ, ГРАНИЦА КОТОРОЙ СОСТОИТ ИЗ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 VI 1953)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}+P(z,t)\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}=0, \tag{1}$$

где z — комплексное переменное, t — действительное и

$$P(z,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-\lambda_i(t)}. \tag{2}$$

Здесь A_i — постоянные, а $\lambda_i(t)$ — действительные непрерывно дифференцируемые функции.

Для случая, когда

$$P(z,t)=z\frac{z+\mu(t)}{z-\mu(t)},\quad |\mu(t)|=1,$$

т. е. функция $P(z,t)$ имеет один простой полюс на окружности единичного круга, П. П. Куфаревым ([1]) доказано, что при определенном выборе функции $\mu(t)$ среди интегралов рассматриваемого уравнения есть интегралы, отображающие единичный круг на область, граница которой состоит из отрезков прямых, и исследовано изменение этой области при изменении параметра t.

Аналогичные исследования могут быть проделаны для уравнения, когда функция $P(z,t)$ имеет вид (2).

Функция

$$w=c(t)\int_0^z\prod_{k=1}^{m}[z-a_k(t)]^{\alpha_k-1}\,dz \tag{3}$$

удовлетворяет уравнению (1), если выполнены следующие условия: $c(t)$ — постоянное; n из функций $a_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,m)$ совпадают с функциями $\lambda_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n;\ n<m)$; $\alpha_i=2$ $(i=1,2,\ldots,n)$; функции $a_k(t)$ $(k=n+1,\ldots,m)$ и $\lambda_i(t)\equiv a_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_k}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{a_k-\lambda_i},\qquad k=n+1,\ldots,m;$$

$$\frac{d\lambda_p}{dt}=A_p\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\alpha_k-1}{\lambda_p-a_k}+A_p\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}\frac{1}{\lambda_p-\lambda_i}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}\frac{A_i}{\lambda_p-\lambda_i},\quad p=1,\ldots,n.$$

Эта система имеет на некотором отрезке единственное действительное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$a_k(t) = a_k^{(0)}, \quad k = n+1, \ldots, m;$$
$$\lambda_p(t) = \lambda_p^{(0)}, \quad p = 1, 2, \ldots, n,$$

при $t = t_0$.

Обозначим через $w_1, w_2, \ldots, w_m$ вершины ломаной, являющейся границей области, на которую функция (3) отображает полуплоскость. Можно доказать, что

$$\frac{dw_k}{dt} = 0$$

для вершин, в которые не переходят при отображении полюсы функции $P(z, t)$, т. е. точки $\lambda_i(t); i = 1, 2, \ldots, n$.

Справедлива теорема о том, что интегралы рассматриваемого уравнения отображают полуплоскость на семейство вложенных друг в друга областей. Отсюда следует, что если за начальную взять функцию $w = z$, то интегралы уравнения (1) отображают полуплоскость на область, принадлежащую полуплоскости, граница которой состоит из отрезков прямых. При изменении параметра на некотором отрезке только n из вершин граничной ломаной двигаются. Эти вершины являются концами прямолинейных разрезов, так как для них $\alpha_k = 2$. С увеличением t эти разрезы увеличиваются.

Белорусский политехнический институт
им. И. В. Сталина

Поступило
2 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Куфарев, Уч. зап. Томск. гос. ун-та, № 8 (1948).