Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

О ПРИМЕНИМОСТИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА К НЕКОТОРЫМ ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 29 V 1953)

§ 1. В полуплоскости $y>0$ рассмотрим область Ω, ограниченную отрезком $(a, b)=\Gamma'$ оси x и кривой Γ, которая целиком, кроме концов a и b, лежит в верхней полуплоскости. Рассмотрим далее два множества функций M_1 и M_2, дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma+\Gamma'$ и равных нулю на Γ; на Γ' функции множества M_1 также равны нулю, а функции множества M_2 имеют равную нулю производную по y. Пусть функция $f(y)$ определена и непрерывна в промежутке $0\leqslant y\leqslant Y$, где Y не меньше наибольшей из ординат области Ω, причем $f(0)=0$ и $f(y)>0$ при $y>0$. Дифференциальный оператор

$$-f(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

примененный к функциям множеств M_1 и M_2, порождает два оператора, которые мы обозначим через A_1 и A_2, соответственно.

Теорема 1. *Операторы A_1 и A_2 положительно-определенные* в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.*

Для доказательства заключим Ω в прямоугольник вида $a'\leqslant x\leqslant b'$, $0\leqslant y\leqslant Y$. Пусть $u(x,y)\in M_1$ или $u(x,y)\in M_2$. Доопределим функцию $u(x,y)$ в прямоугольнике, полагая ее равной нулю вне Ω. Применяя неравенство Буняковского к тождеству

$$u(x,y)=-\int\limits_y^Y u_\eta(x,\eta)\,d\eta,$$

легко найдем

$$\|u^2\|=\iint\limits_\Omega u^2dx\,dy\leqslant Y^2\iint\limits_\Omega\{f(y)u_x^2+u_y^2\}\,dx\,dy.$$

С другой стороны, если $u\in M_i$, $i=1, 2$, то

$$\iint\limits_\Omega\{f(y)u_x^2+u_y^2\}\,dx\,dy=(A_iu, u).$$

Теорема доказана.

Пусть надо проинтегрировать в области Ω уравнение

$$-f(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi(x, y)\quad(\varphi(x, y)\in L_2(\Omega)) \tag{1}$$

* Определение положительно-определенного оператора см., например, [1].

при краевых условиях

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u|_{\Gamma'} = 0 \tag{2^1}$$

или

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u_y|_{\Gamma'} = 0. \tag{2^2}$$

Известные теоремы вариационного исчисления [1] позволяют заменить эту задачу задачей о минимуме интеграла

$$F(u) = \iint_{\Omega} \{f(y)\,u_x^2 + u_y^2 - 2u\varphi\}\,dx\,dy. \tag{3}$$

Класс допустимых функций определяется следующими условиями: 1) любая допустимая функция $u(x, y)$ имеет обобщенную производную [2] u_y, квадратично суммируемую в Ω, и обобщенную производную u_x, квадратично суммируемую в любой подобласти Ω, граница которой не имеет общих точек с Γ'; при этом

$$\iint_{\Omega} f(y) u_x^2 dx\,dy < \infty;$$

2) в случае краевого условия (2^1) существует такая последовательность $u_n \in M_1$, что

$$\lim_{u\to\infty} \iint_{\Omega} \left\{ f(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy = 0. \tag{4}$$

3) в случае краевого условия (2^2) существует такая последовательность функций u_n, дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и равных нулю на Γ, что попрежнему выполняется равенство (4).

Так как $f(y) > 0$ при $y > 0$, то из (4) вытекает, что допустимые функции удовлетворяют условию $u|_{\Gamma} = 0$ в смысле С. Л. Соболева.

В силу теоремы 1 задача о минимуме интеграла (3) имеет решение, которое в обобщенном смысле удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2^1) или (2^2). Если f имеет три непрерывные производные, то, как можно доказать, функция $u_0(x, y)$, реализующая минимум интеграла (3), имеет обобщенные вторые производные, квадратично суммируемые в каждой внутренней подобласти Ω, и почти всюду в Ω удовлетворяет уравнению (1). Если $\varphi(x, y)$ подчинена в некоторой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ условию Липшитца с показателем γ, $0 < \gamma < 1$, то на каждом замкнутом подмножестве, принадлежащем Ω', вторые производные от $u_0(x, y)$ подчинены условию Липшитца с тем же показателем, и $u_0(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) везде в Ω.

§ 2. Решение однородного уравнения

$$f(y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

при краевых условиях

$$u|_{\Gamma} = g_1(s); \quad u|_{\Gamma'} = g_2(s) \tag{6^1}$$

или

$$u|_{\Gamma} = g_1(s); \quad u_y|_{\Gamma'} = g_2(s) \tag{6^2}$$

можно свести к задаче о минимуме интеграла

$$\iint_{\Omega} \{f(y)\,u_x^2 + u_y^2\}\,dx\,dy, \tag{7}$$

если существует хотя бы одна функция $\psi(x, y)$, удовлетворяющая составленным краевым условиям и сообщающая интегралу (7) конечное значение. Класс допустимых функций определяется требованием, чтобы разность $u-\psi$ удовлетворяла перечисленным выше условиям 1) и 2) в случае (6^1) и условиям 1) и 3) в случае (6^2). Поставленная таким образом вариационная задача разрешима; ее решение дважды непрерывно дифференцируемо в Ω и удовлетворяет уравнению (6), если $f(y)$ имеет три непрерывные производные.

§ 3. Допустим теперь, что $f(y)=y^\alpha\omega(y)$, где $\omega(y)\geqslant k>0$ при $0\leqslant y\leqslant Y$ и $\alpha>0$. Введем в рассмотрение множество M функций, подчиненных следующим условиям: если $u(x, y)\in M$, то: 1) u, u_x, u_{xx}, $\omega(y)\,u_y$, $(\omega(y)\,u_y)_y$ непрерывны в $\overline{\Omega}$; 2) $u|_\Gamma=0$; 2a) если $\alpha<1$, то $u|_{\Gamma'}=0$. На множестве M зададим дифференциальный оператор

$$Bu=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(f(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{8}$$

Теорема 2. *Оператор B положительно-определенный на множестве M.*

Доказательство — такое же, как в теореме 1, с той только разницей, что на этот раз следует после того, как функция $u(x, y)$ доопределена в прямоугольнике, исходить из тождества

$$u(x, y)=\int_{a'}^{x}u_\xi(\xi, y)\,d\xi.$$

Пусть $\varphi(x, y)\in L_2(\Omega)$. Из теоремы 2 вытекает существование и единственность решения уравнения

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(f(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\varphi(x, y) \tag{9}$$

при краевых условиях

$$u|_\Gamma=0,\quad u|_{\Gamma'}=0, \tag{10}$$

если $\alpha<1$, и

$$u|_\Gamma=0, \tag{11}$$

если $\alpha\geqslant 1$. Уравнение (9) при этих условиях разрешимо вариационным методом; о дифференциальных свойствах решения можно сказать то же, что было сказано о решениях уравнения (1). Очевидным образом формулируется краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(f(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

при соответствующих неоднородных краевых условиях и устанавливается, как обычно, ее разрешимость с помощью вариационного метода. Если $\alpha<1$, то необходимо задавать значения искомой функции на Γ', если же $\alpha\geqslant 1$, то задавать эти значения нельзя. Это вполне согласуется с результатами М. В. Келдыша ([3]).

§ 4. Теорема 3. *Операторы A_1^{-1} и A_2 вполне непрерывны. Оператор B^{-1} вполне непрерывен, если $\alpha<2$.*

При доказательстве мы воспользуемся следующим критерием полной непрерывности. Пусть A — положительно-определенный оператор в гильбертовом пространстве H. Для того чтобы оператор A^{-1} был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество, ограниченное в метрике пространства H_A*, было компактным в H.

Для определенности остановимся на операторе B^{-1}.

---

* Определение пространства H_A см. ([1]), § 3.

Простыми средствами устанавливается полная непрерывность оператора B^{-1} в том частном случае, когда $f(y)=y^{\alpha}$, $\alpha<2$, а область Ω есть прямоугольник $a'\leqslant x\leqslant b'$, $0\leqslant y\leqslant Y$. Действительно, в этом случае легко доказать, что собственные числа оператора B сгущаются только на бесконечности, а система его собственных функций полна $L_2(\Omega)$.

Обратимся к общему случаю. Как легко видеть, норма в пространстве H_B определяется формулой

$$\|u\|^2+\iint\limits_{\Omega}\{u_x^2+f(y)u_y^2\}\,dx\,dy.$$

Пусть N — ограниченное множество функций из H_B, так что $\|u\|<C$, если $u\in N$. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega}\{u_x^2+y^{\alpha}u_y^2\}\,dx\,yd<\frac{C^2}{\min(1,k)}=C_1\,.$$

Поместим Ω внутрь прямоугольника $a'\leqslant x\leqslant b'$, $0\leqslant y\leqslant Y$ и доопределим в нем функции множества N, полагая их равными нулю вне Ω. Доопределенные таким образом функции имеют, в силу условия $u|_{\Gamma}=0$, обобщенные первые производные; при этом, очевидно,

$$\int\limits_{a'}^{b'}\int\limits_{0}^{Y}\{u_x^2+y^{\alpha}u_y^2\}\,dx\,dy<C_1\,.$$

В силу полной непрерывности оператора B^{-1} в упомянутом выше частном случае из множества N можно выделить последовательность, сходящуюся в среднем в прямоугольнике. Эта же последовательность сходится в среднем в Ω; тем самым доказана полная непрерывность оператора B^{-1}.

Из теоремы 3 вытекает применимость метода Галеркина к уравнению вида

$$f(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\sqrt{f(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu\equiv\varphi(x,y)$$

при краевых условиях (2^1) или (2^2), а также к уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(f(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\sqrt{f(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+c(u)=\varphi(x,y)$$

при краевых условиях (10), если $\alpha<1$, и (11), если $\alpha\geqslant 1$. Коэффициенты a, b и c предполагаются измеримыми и ограниченными.

Поступило
14 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, 1952. [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. [3] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 2 (1951).