Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Б. КАПИЛЕВИЧ

О ГЛАВНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 29 V 1953)

Рассмотрим в области $D\,(y > x > 0)$ уравнение

$$z_{xy} - f(y-x)(z_y - z_x) = 0 \quad \left(f(y-x) = -\frac{1}{2\sqrt{K}}\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{K}}\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial y}\right), \qquad (1)$$

где $\sqrt{K(y-x)} = b_1(y-x)^{1/3} + b_3(y-x)^{3/3} + b_5(y-x)^{5/3} + \ldots$ (b_1, b_3, $b_5, \ldots$ — постоянные величины).

Обозначим через $v(x_0, y_0, x, y)$ функцию Римана уравнения (1), а через $H(x_0, y_0, x, y)$ и $\overline{H}(x_0, y_0, x, y)$ — функции Адамара [1], соответственно, следующих краевых задач для этого уравнения:

$$z(0, y) = \varphi(y), \quad \lim_{y\to x} z_\eta(x, y) = \nu(x); \qquad (2)$$

$$z(0, y) = \overline{\varphi}(y), \quad z(x, x) = \tau(x) \quad (\tau(0) = \overline{\varphi}(0)). \qquad (3)$$

Здесь $\eta = -\left[{}^3/_4(y-x)\right]^{2/3}$, а $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\overline{\varphi}(y)$ — произвольные функции, дважды непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области.

Фиксируем на линии $y = x$ плоскости (x, y) точки $A(x_0, x_0)$, $B(y_0, y_0)$ и проведем в каждой из них две характеристики уравнения (1), расположенные в полуплоскости D и разделяющие ее на шесть областей: *1* $(x_0 < y_0 < x < y)$, *2* $(x < x_0 < y_0 < y)$, *3* $(x < y < x_0 < y_0)$, *4* $(x_0 < x < y_0 < y)$, *5* $(x < x_0 < y < y_0)$ и *6* $(x_0 < x < y < y_0)$. В этих областях построим из решений уравнения (1)

$$U = \frac{b_1 v(x_0, y_0, x, y)}{\sqrt{K(y_0 - x_0)}}, \quad V = \frac{b_1 H(x_0, y_0, x, y)}{\sqrt{K(y_0 - x_0)}}, \quad \overline{V} = \frac{b_1 \overline{H}(x_0, y_0, x, y)}{\sqrt{K(y_0 - x_0)}} \qquad (4)$$

интегралы

$$u = 6^{-1/3\varepsilon}\int_p^q \Phi(x', x', x, y)\left[\lim_{y\to x = x'} \Psi_\eta(x_0, y_0, x, y)\right] dx', \qquad (5)$$

$$u = 6^{-1/3\varepsilon}\int_p^q \Phi(x_0, y_0, x', x')\left[\lim_{y_0\to x_0 = x'} \Psi_{\eta_0}(x_0, y_0, x, y)\right] dx', \qquad (6)$$

понимая под символами Φ, Ψ одну из величин U, V, $\overline{V}$ и полагая, что параметры p, q могут принимать значения x, y, x_0, y_0, а $\varepsilon = \pm 1$.

Таким путем могут быть образованы решения $u_{lmn}^{(s)}$ уравнения (1) из табл. 1, где указаны номер рассматриваемой формулы и замена букв, которая производится в ней.

Обозначим далее через $u_{124}^{(3)}$, $u_{124}^{(4)}$, $u_{156}^{(3)}$, $u_{156}^{(4)}$ интегралы, которые возникают в результате подстановки в формулы для $u_{124}^{(1)}$, $u_{124}^{(2)}$, $u_{156}^{(1)}$, $u_{156}^{(2)}$

вместо x, y, x_0, y_0 значений y, x, y_0, x_0*. Будем называть функции u_3, u_4 главными решениями уравнения (1), принадлежащими линии перехода, а u_1 и u_5 — главными решениями, принадлежащими, соответственно, характеристикам $x = x_0$, $y = y_0$ и $x = y_0$, $y = x_0$. Тогда имеют место следующие теоремы:

Таблица 1

	Решение	$u_{124}^{(1)}$	$u_{124}^{(2)}$	$u_{156}^{(1)}$	$u_{156}^{(2)}$	$u_{313}^{(1)}$	$u_{313}^{(2)}$	u_{32} / u_{42}	u_{36} / u_{46}	$u_{413}^{(1)}$	$u_{413}^{(2)}$	$u_{51}^{(1)}$ / $u_{51}^{(2)}$	$u_{53}^{(1)}$ / $u_{53}^{(2)}$	$u_{54}^{(1)}$ / $u_{54}^{(2)}$	$u_{55}^{(1)}$ / $u_{55}^{(2)}$
	Формула	5	6	5	6	5	6	5 / 6	6 / 5	5	6	5 / 6	5 / 6	5 / 6	5 / 6
Значение букв	ε	-1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	p	y_0	y_0	y	y	x_0	x	x_0	x	x	x_0	y_0	y	x	x_0
	q	y	y	y_0	y_0	y_0	y	y_0	y	y	y_0	x	x_0	y_0	y
	Φ	U	V	V	U	V	V	U	U	U	U	V	V	U	U
	Ψ	$\overline{V}$	U	U	$\overline{V}$	U	U	U	U	$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$	U	U

Теорема 1. 1) *Главные решения u_{124}, u_{156}, для которых в областях (2, 4) и (5, 6) выполняются, соответственно, равенства*

$$u_{124}^{(1)} = u_{124}^{(2)} = u_{124}^{(3)} = u_{124}^{(4)}, \quad u_{156}^{(1)} = u_{156}^{(2)} = u_{156}^{(3)} = u_{156}^{(4)}, \tag{7}$$

определяют функцию $U(x_0, y_0, x, y)$ уравнения (1) *в этих областях.*

2) *Главные решения $u_{313}^{(1)}$, $u_{313}^{(2)}$, $u_{413}^{(1)}$, $u_{413}^{(2)}$, связанные соотношениями*

$$u_{313}^{(1)} = u_{313}^{(2)}, \quad u_{413}^{(1)} = u_{413}^{(2)}, \tag{8}$$

представляют, соответственно, функции $V(x_0, y_0, x, y)$ и $\overline{V}(x_0, y_0, x, y)$ задач (2) *и* (3) *для уравнения* (1).

3) *Главные решения u_5 удовлетворяют в областях 1, 3, 4 и 5, соответственно, равенствам*

$$u_{51}^{(1)} = u_{51}^{(2)}, \quad u_{53}^{(1)} = u_{53}^{(2)}, \quad u_{54}^{(1)} = u_{54}^{(2)}, \quad u_{55}^{(1)} = u_{55}^{(2)}. \tag{9}$$

На характеристиках $x = x_0$, $y = y_0$ интегралы u_{54} и u_{55} обладают логарифмическими особенностями и представляют фундаментальные решения уравнения (1) *в областях, где эти функции определены.*

Теорема 2. *Главные решения, принадлежащие характеристикам и линии перехода уравнения* (1), *связаны соотношениями:*

$$u_{124} = u_{32} - u_{42}, \tag{10a}$$

$$u_{156} = u_{36} - u_{46}, \tag{10b}$$

$$u_{51} = u_{31} - u_{41}, \tag{11a}$$

$$u_{53} = u_{33} - u_{43}. \tag{11b}$$

---

* Индексы l, s в символе $u_{lmn}^{(s)}$ означают номер решения; индексы m, n указывают области, для которых определена рассматриваемая функция.

Формулы (10a), (10b) дают непрерывное продолжение функции Римана уравнения (1), соответственно, из областей *4*, *5* в области *2*, *6*. С помощью равенств (11a), (11b) фундаментальные решения уравнения (1) могут быть продолжены из областей *4*, *5*, соответственно, в области *1* и *3*.

Замечание 1. В случае уравнения

$$z_{xy}-\frac{\beta}{y-x}(z_y-z_x)-\frac{b^2}{4}z=0 \quad (\beta={}^1/_6) \tag{12}$$

(b — постоянная величина), исследовавшегося ранее в работе [2], начальные значения на линии $\eta=0$ для функций U, V и $\overline{V}$, которые входят в приведенные выше формулы, имеют вид*:

$$U(x_0, y_0, x', x')=6^{1/3}\gamma_2 r_0^{-1/3}\overline{J}_{-1/6}(br_0) \quad \left(\gamma_2=({}^3/_4)^{2/3}\frac{\Gamma({}^5/_3)}{\Gamma^2({}^5/_6)}\right),$$

$$V(x_0, y_0, x', x')=6^{1/3}\gamma r_{1_0}^{-1/3}\overline{I}_{-1/6}(br_{1_0}),$$

$$\lim_{y\to x=x'} U_\eta(x_0, y_0, x, y)=6^{1/3}\gamma_1(y_0-x_0)^{2/3}r_0^{-5/3}\overline{J}_{-5/6}(br_0) \quad \left(\gamma_1=\frac{\Gamma({}^1/_3)}{\Gamma^2({}^1/_6)}\right), \tag{13a}$$

$$\lim_{y\to x=x'} \overline{V}_\eta(x_0, y_0, x, y)=$$

$$=-({}^4/_3)^{2/3}K(y_0-x_0)^{2/3}r_{1_0}^{-5/3}\overline{I}_{-5/6}(br_{1_0}) \quad \left(K=\frac{\Gamma({}^5/_6)}{\Gamma({}^5/_3)\,\Gamma({}^1/_6)}\right),$$

где

$$\overline{J}_{-\nu}(z)=\frac{\Gamma(1-\nu)\,z^\nu}{2^\nu}J_{-\nu}(z), \quad \overline{I}_{-\nu}(z)=\overline{J}_{-\nu}(iz), \quad \gamma=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{\Gamma({}^5/_6)}{\Gamma({}^1/_6)\,\Gamma({}^2/_3)}$$

$$r_0^2=(x'-x_0)(y_0-x'), \quad r_{1_0}^2=(x_0-x')(y_0-x').$$

Таким образом, соотношения (7), (8), (9), (10) и (11) приводят здесь к формулам преобразования интегралов с функциями Бесселя; с помощью трансформации Лапласса эти формулы могут быть получены и путем непосредственных вычислений.

Замечание 2. Как следует из работ [3,4], для функций (4) выполняются оценки:

$$U(x_0, y_0, x', x')=0(1)\,r_0^{-1/3}, \quad \lim_{y\to x=x'} U_\eta(x_0, y_0, x, y)=$$

$$=0(1)(y_0-x_0)^{2/3}r_0^{-5/3}, \tag{13b}$$

$$V(x_0, y_0, x', x')=0(1)\,r_{1_0}^{-1/3}, \quad \lim_{y\to x=x'} \overline{V}_\eta(x_0, y_0, x, y)=$$

$$=0(1)(y_0-x_0)^{2/3}r_{1_0}^{-5/3},$$

показывающие, что выражения u_1, u_3, u_4, u_5 обладают характером особенности гипергеометрических интегралов, к которым сводятся эти выражения в случае уравнения Эйлера — Пуассона $\left(f=\frac{\beta}{y-x}\right)$, где они являются ветвями функции [1,3,5,6,8]:

$$u=[(y_0-x)(y-x_0)]^{-\beta}P\begin{Bmatrix} 0, & 1, & \infty & \\ 0, & 0, & \beta & \omega \\ 0, & 1-2\beta, & \beta & \end{Bmatrix}$$

$$\left(\omega=\frac{(x_0-x)(y-y_0)}{(y-x_0)(y_0-x)}, \ \beta={}^1/_6\right) \tag{14}$$

---

* Для получения аналогичных данных на линии $\eta_0=0$ достаточно в формулах (13) заменить x, y, η, r_0, r_{1_0} через x_0, y_0, η_0, r, r_1 ($r^2=(x'-x)(y-x')$, $r_1^2=(x-x')(y-x')$).

При этом интегралам u_1, (u_3, u_4), u_5 соответствуют решения гипергеометрического уравнения, принадлежащие особым точкам $\omega=0$, $\omega=1$, $\omega=\infty$, а равенствам (7), (8), (9), (10) и (11) — известные соотношения Куммера* и линейные соотношения для гипергеометрических функций (см. ([7]), §§ 14.53, 14.61). Для получения фундаментальных решений уравнения Эйлера — Пуассона можно использовать другие интегралы гипергеометрического уравнения, принадлежащие особым точкам с равными показателями $\omega=0$, $\omega=\infty$ и обладающие логарифмической особенностью в этих точках. Аналогичные решения u_2, u_6, а также формулы, связывающие их с интегралами u_1, u_3, u_4, u_5, могут быть построены и для уравнения (12) как в случае $0<\beta<{}^1/_2$, так и в случае $\beta=n/2$ $(n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, когда разность показателей точки $\omega=1$ в формуле (14) равна целому числу, т. е. одно из главных решений u_3 или u_4 имеет логарифмическую особенность на линии перехода. Всего таким образом как в первом, так и во втором случае возникают 24 линейных соотношения, связывающих три из четырех главных решений, принадлежащих каждой из областей однозначности *1, 2, 3, 4, 5* и *6*.

З а м е ч а н и е 3. С помощью найденных формул для функции U, V и $\overline{V}$ легко убедиться, что выражения

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{b_1}\int_0^x \sqrt{K(y_0)}\,[\overline{\varphi}_{y_0}+f(y_0)\,\overline{\varphi}]\,V(0, y_0, x, x)\,dy_0, \tag{15a}$$

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{b_1}\int_0^x \sqrt{K(y_0)}\,[\overline{\varphi}_{y_0}+f(y_0)\,\overline{\varphi}]\,[\lim_{y\to x}\overline{V}_\eta(0, y_0, x, y)]\,dy_0 \tag{15b}$$

являются решениями, соответственно, следующих интегральных уравнений типа Вольтерра:

$$\int_0^y [\lim_{y_0\to x_0=x'} U_{\eta_0}(x_0, y_0, 0, y)]\,\varphi_1(x')\,dx'=6^{1/6}\,\overline{\varphi}(y), \tag{16a}$$

$$\int_0^y U(x', x', 0, y)\,\varphi_2(x')\,dx'=-6^{1/6}\,\overline{\varphi}(y). \tag{16b}$$

В случае (12) им соответствуют интегральные уравнения с сингулярными ядрами (13a), которые при $b=0$ переходят в уравнения Абеля ([3],[8]). В силу оценок (13b) тот же характер особенности имеют ядра уравнений (15) и их решений (16).

Поступило
13 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. H a d a m a r d, Bull. Soc. math. de France, **31**, 208 (1903). [2] М. Б. К а п и л е в и ч, Матем. сборн., **30** (72), в. 1, 11 (1952). [3] S. G e l l e r s t e d t, Ark. f. Math. Aster. o. Fys., 25A, № 29, 1 (1937). [4] Ф. И. Ф р а н к л ь, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, № 5 (1944). [5] G. D a r b o u x, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 1896. [6] L e R o u x, Ann. Sci. de l'Ecole norm. sup., sér. 3, 12 (1895). [7] Е. Т. У и т т е к е р, Г. Н. В а т с о н, Курс современного анализа, **2**, 1934, стр. 75. [8] Ф. Т р и к о м и, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, М. — Л., 1947.

---

* Соотношениями Куммера здесь называются преобразования гипергеометрических интегралов, получаемые в результате дробно-линейной замены переменной интегрирования.