Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. Д. ВВЕДЕНСКАЯ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 6 VI 1953)

Рассматриваются уравнения

$$L_1[u] \equiv y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, y)u = 0, \qquad (1)$$

$$L_2[u] \equiv y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, y)u = 0 \qquad (2)$$

в области D, расположенной в полуплоскости $y > 0$. Коэффициенты a, b, c — аналитические функции, $c \leqslant 0$, $m > 0$. Граница S области D состоит из конечного числа кривых Γ_j, лежащих в полуплоскости $y > 0$, и из отрезков оси x. Совокупность кривых Γ_j обозначим через Γ. Каждая из кривых Γ_j такова, что угол, составленный касательной к ней с осью x, удовлетворяет условию Гельдера. Через $\{P_i = (x_i, 0)\}$ обозначим множество концов Γ, лежащих на оси x.

На S задаются краевые условия:

$$l[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu} + A(x, y)u = \varphi(x, y) \quad \text{на } \Gamma; \qquad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{на } S \diagdown \Gamma \diagdown \{P_i\}. \qquad (4)$$

Здесь $\partial u / \partial \nu$ — производная по направлению $\vec{\nu}(x, y)$, составляющему острый угол с внутренней нормалью к Γ. Функции A, φ и компоненты единичного вектора $\vec{\nu}$ удовлетворяют на $\Gamma + \{P_i\}$ условию Гельдера, $f(x)$ непрерывна на $S \diagdown \Gamma$, кроме того $A \leqslant 0$ и $\max\limits_{P \in \Gamma + \{P_i\}} A(P) + \max\limits_{P_1 \in \overline{D}} c(P_1) < 0$.

В уравнении (2) m и $a(x, y)$ таковы, что для области D всегда разрешима задача Дирихле (см. [1]). Отметим, что для уравнения (2) задача с краевым условием (3), заданным на всей границе S, при этом не всегда разрешима. Задача с краевым условием (3) в том случае, когда задача Дирихле не всегда разрешима в D, исследована в работе [2].

Теорема 1. *В D существуют ограниченные решения уравнений* (1) *и* (2), *непрерывные в* $\overline{D} \diagdown \{P_i\}$ *и удовлетворяющие условиям* (3) *и* (4).

Доказательство. Строим возрастающую последовательность областей D_n таких, что $\bigcup D_n = D$, область D_n лежит в полуплоскости $y > \varepsilon_n > 0$ ($\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$); граница S_n области D_n совпадает с Γ при $y > {}^5/_4\varepsilon_n$ и вне некоторой окрестности точек $\{P_i\}$ идет по прямой $y = \varepsilon_n$.

На S_n рассмотрим краевое условие:

$$l_n[u] \equiv \alpha_n(x, y)\frac{\partial u}{\partial \nu_n} + A_n(x, y)u = \varphi_n(x, y). \tag{5}$$

Здесь α_n, A_n, $\vec{\nu}_n$, φ_n удовлетворяют на S_n условию Гельдера; $A_n \leqslant 0$, $\alpha_n > 0$. Кроме того, $A_n = A$ при $y > 2\varepsilon_n$; $A_n = -1$ при $y < {}^7/_4\,\varepsilon_n$; $\varphi_n = \varphi$ при $y > {}^7/_4\,\varepsilon_n$; $\varphi_n = -f$ при $y < {}^6/_4\,\varepsilon_n$ (функция $f(x, y)$ является непрерывным продолжением $f(x)$ в область D); $\alpha_n = 1$ при $y > {}^7/_4\varepsilon_n$; $\alpha_n = \varepsilon_n$ при $y < {}^5/_4\,\varepsilon_n$; $\cos(\vec{\nu}_n, \vec{y}) = \cos(\vec{\nu}, \vec{y})$ при $y > {}^5/_4\,\varepsilon_n$; $\cos(\vec{\nu}_n, \vec{y}) = -1$ при $y = \varepsilon_n$; на остальных частях S_n эти функции монотонны.

В D_n существует решение $u_n(x, y)$ уравнения (1) (или (2)), удовлетворяющее краевому условию (5). Это доказано И. Н. Векуа ([3]). Тем же методом, что в работе ([2]), показывается существование ограниченной в $\overline{D}$ и непрерывной в $D + \Gamma$ функции $u(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (1) (или (2)) и условию (3). В граничных точках $Q = (x_0, y) \overline{\in} \{P_i\}$ функция $u(x, y)$ тоже непрерывна и удовлетворяет условию (4).

Чтобы показать последнее, рассмотрим в D функцию $v(x, y) = y^\beta + (x - x_0)^2$, где $0 < \beta < 1$. В достаточно малой окрестности $O(Q)$ точки Q справедливы неравенства: $L_j[v] < 0$ ($j = 1, 2$), $l_n[v] < 0$ на S_n. Пользуясь этим, легко показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $M(\varepsilon) > 0$, что $|u_n(x, y) - f(Q)| < Mv + \varepsilon$ в $O(Q) \cap D_n$ (следует из принципа максимума, справедливого для уравнений (1) и (2) и из леммы 1 работы ([4])). Это доказывает теорему.

Теорема 2. *Если в точке $P_i \in \{P_i\}$ направление $\vec{\nu}(x_i, 0)$ составляет тупой угол с осью y, то $u(x, y)$ непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $v_i(x, y) = [h_1(x - x_i) + h_2 y]^\beta$, где $0 < \beta < 1$, а постоянные h_1 и h_2 таковы, что в пересечении D с некоторой окрестностью $O(P_i)$ справедливы неравенства $L_j[v_i] < 0$, $\left.\dfrac{\partial v_i}{\partial \nu}\right|_\Gamma < 0$. Легко проверить, что при нашем определении l_n на S_n в $O(P_i)$ выполняется неравенство $l_n[v_i] < 0$. С помощью функции v_i так же, как и выше, показывается непрерывность $u(x, y)$ в точке P_i.

Теорема 3. *Если во всех точках $\{P_i\}$ направление $\vec{\nu}$ составляет тупой угол с осью y, то существует и единственно непрерывное в $\overline{D}$ решение уравнений* (1) (*или* (2)), *удовлетворяющее условиям* (3) *и* (4).

Доказательство следует из теорем 1, 2, из принципа максимума для уравнений (1) и (2) и из леммы 1 работы ([4]).

Множество точек $P_k^* \in \{P_i\}$, в которых $\vec{\nu}$ составляет с осью y прямой или острый угол, обозначим через $\{P_k^*\}$.

Теорема 4. *Если пересечение D с достаточно малой окрестностью любой из точек $P_k^* = (x_k, 0)$ лежит по одну сторону от прямой $x = x_k$ и Γ не касается этой прямой в точке P_k^*, то решение $u(x, y)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (3) *и* (4), *будет единственным в классе функций, ограниченных в D и непрерывных в $D \setminus \{P_k^*\}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждой точки P_k^* существует дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{D} \setminus \{P_k^*\}$ функция w_k такая, что $w_k > 0$, $L_1[w_k] < 0$ в D, $\lim\limits_{P \to P_k^*} w(P) = \infty$, $l[w_k] < 0$ на Γ. Действительно, если $L_1[u] = 0$, $l[u] = 0$, $u(x, 0) = 0$ при $(x, 0) \overline{\in} \{P_k^*\}$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливы соотношения:

$$L_1\left[u \pm \varepsilon \sum_{\{P_k^*\}} w_k\right] \lesseqgtr 0,\ l\left[u \pm \varepsilon \sum_{\{P_k^*\}} w_k\right] \lesseqgtr 0 \text{ и } u \pm \varepsilon \sum_{\{P_k^*\}} w_k \gtreqless 0, \text{ т. е. } u \equiv 0.$$

Чтобы построить w_k в случае, когда $m \geqslant 2$, $b(P_k^*) \neq 0$, $b(P_k^*)[x - x_k] < 0$ в $O(P_k^*) \cap D$, рассмотрим функцию

$$q_k = \frac{b_k}{\sqrt{|x - x_k|}} \exp\left\{-\frac{b_k^2 y^2}{4|x - x_k|}\right\} - (y+1)^N, \quad \text{где } b_k > |b(P_k^*)|,\ N > 0.$$

Можно так выбрать N и доопределить, если надо, функцию q_k, чтобы в D выполнялось условие $L_1[q_k] < 0$. Очевидно, $l[q_k]$ ограничено сверху на Γ и $l[q_k] < 0$ в некоторой окрестности P_k^*. По теореме 1 существует ограниченная функция $\tilde{q}_k$ такая, что $L_1[\tilde{q}_k] = 0$, $l[\tilde{q}_k] > \max\limits_{\Gamma + \{P_l\}} l[q_k]$. Функция $w_k = q_k - \tilde{q}_k + |\inf(q_k - \tilde{q}_k)|$ удовлетворяет нашим требованиям. В случае, когда $m < 2$ или $b(P_k^*)[x - x_k] \geqslant 0$ в $O(P_k^*) \cap D$, рассмотрим функцию

$$q_k = -\ln\left[\frac{(x - x_k)^2}{4} + \frac{y^{m+2}}{(m+2)^2}\right] + y^{\beta}\eta(x) - (y+1)^N,$$

где $0 < \beta < 1$; $\eta(P_k^*) = 1$, $\eta = 0$ вне $O(P_k^*)$; $N > 0$. Выбором β, η и N можно добиться, чтобы выполнялись условия: $L_1[q_k] < 0$ в D и $l[q_k] < 0$ на Γ в $O(P_k^*)$. По q_k строятся затем $\tilde{q}_k$ и w_k.

Лемма. *Если для двух решений u_1 и u_2 уравнения* (1) *на $S \setminus \{P_k^*\}$ справедливо неравенство $u_1 > u_2$, то $u_1 > u_2$ в D.*

Доказательство легко провести, используя функции q_k, построенные при доказательстве предыдущей теоремы.

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4 *решение $u(x, y)$ уравнения* (1), *построенное в теореме* 1, *непрерывно в $\overline{D}$.*

Доказательство. В силу леммы, достаточно доказать, что u непрерывна на S. Обозначим $\overline{\lim\limits_{P \to P_1}} t(P)$, $\underline{\lim\limits_{P \to P_1}} t(P)$, $\lim\limits_{P \to P_1} t(P)$ вдоль кривой γ, соответственно, через $\overline{t}(P_1, \gamma)$, $\underline{t}(P_1, \gamma)$, $t(P_1, \gamma)$. Пусть $\overline{u}(P_k^*, \Gamma) = f(P_k^*) + \overline{\omega}_k$. Рассмотрим подобласть D_k области D такую, что $P_k^* \in \overline{D}_k$, $P_j^* \overline{\in} \overline{D}_k$, если $j \neq k$, кроме того, границей D_k является кривая $\gamma_k = \gamma_k' + \gamma_k''$, причем кривые $\gamma_k' \in D$, $\gamma_k'' \in \Gamma$ и в окрестности концов γ_k'' кривая γ_k' лежит между γ_k'' и направлением $\vec{\nu}$. Так же, как в теоремах 1 и 2, можно доказать, что существует непрерывное в $\overline{D}_k$ решение $u_k(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (3) на γ_k'' и условию $u_k \geqslant u$ на γ_k'. С помощью функции w_k, построенной при доказательстве теоремы 4, легко показать, что $u_k \geqslant u$ в D_k и, значит, $\bar{u}(P_k^*, \Gamma) \leqslant \bar{u}(P_k^*, \gamma_k)$. Предположим, что $\omega_k > 0$ и рассмотрим функцию

$$r_k = \frac{\psi^\alpha}{\psi_k^\alpha}(\bar{\omega}_k + \varepsilon) + f(P_k^*) + M(|x - x_k| + y) + \varepsilon,$$

где $\psi(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{|x - x_k|}$, $\psi_k = \psi(P_k^*, \Gamma)$; $0 < \alpha < 1$; $M > 0$; $\varepsilon > 0$.

Можно так выбрать M, чтобы $L_1[r_k] < 0$ в достаточно малой окрестности $O(P_k^*)$ и $r_k > u$ на границе $O(P_k^*)$. Поскольку $r_k(P_k^*, \gamma_k) = f(P_k^*) + \theta_\varepsilon \bar{\omega}_k$, где $0 < \theta_\varepsilon < \theta < 1$, если ε достаточно мало, то и $\bar{u}(P_k^*, \gamma_k') < f(P_k^*) + \theta \bar{\omega}_k < \bar{u}(P_k^*, \Gamma)$. Последнее неравенство противоречит неравенству $\bar{u}(P_k^*, \Gamma) \leqslant \bar{u}(P_k^*, \gamma_k')$, значит, $\bar{\omega}_k \leqslant 0$. Аналогично показывается, что если $\underline{u}(P_k^*, \Gamma) = f(P_k^*) + \underline{\omega}_k$, то $\underline{\omega}_k \geqslant 0$, т. е. $\bar{\omega}_k = \underline{\omega}_k = 0$, откуда следует непрерывность $u(x, y)$ в точке P_k^* на границе S.

Замечание. Все предыдущие теоремы верны и для краевых условий: $l[u] = \varphi$ на Γ_1, где $\Gamma_1 \in \Gamma$; $u = f$ на $S \setminus \Gamma_1 \setminus \{P_i\}_1$ ($\{P_i\}_1$ — множество концов Γ_1, лежащих на оси x).

Пользуясь методами, которые применялись при рассмотрении уравнения (1), можно доказать следующую теорему для эллиптических уравнений:

Теорема 6. *В ограниченной области D существует и единственно непрерывное в $\bar{D}$ решение уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, y)u = 0,$$

удовлетворяющее на границе S области D условиям:

$$l[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu} + Au = \varphi \text{ на } \Gamma; \qquad u = f \text{ на } S \setminus \Gamma.$$

(Здесь a, b, c — аналитические функции, $c \leqslant 0$, $A \leqslant 0$; $\Gamma \in S$ состоит из конечного числа дуг; граница S и функции $\vec{\nu}$, A, φ, f удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и выше.)

В заключение автор считает долгом искренне поблагодарить своего руководителя О. А. Олейник.

Поступило
4 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, **77**, № 2, 181 (1951). [2] О. А. Олейник, ДАН, **87**, № 6, 855 (1952). [3] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М. — Л., 1948, стр. 138—148. [4] О. А. Олейник, Матем. сборн., **30**, 3, 695 (1952).