Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 4

МАТЕМАТИКА

П. П. БЕЛИНСКИЙ

ПОВЕДЕНИЕ КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ИЗОЛИРОВАННОЙ ТОЧКЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 23 V 1953)

В настоящей статье приводится теорема, которая является естественным завершением теоремы Тайхмюллера — Виттиха ([1]) и содержит обобщение результатов Б. В. Шабата ([2]) о дифференцируемости квазиконформного отображения на случай выполнения интегрального условия Гельдера.

Теорема. *Пусть функция* $w = f(z)$ *определена, непрерывна, ограничена и осуществляет квазиконформное отображение области* $0 < |z| \leqslant 1$. *Тогда, если*

$$\iint\limits_{0<|z|\leqslant 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z = A < \infty,$$

где $d\sigma_z$ *— элемент площади в плоскости* z, *то существует* $\lim\limits_{z\to 0} w = w_0$ *и функция* $f(z)$ *моногенна в точке* z_0, *причем*

$$\lim_{z\to 0} \frac{w-w_0}{z} \neq 0, \infty. \tag{1}$$

Доказательство опирается на несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть кольцо* $r \leqslant |z| \leqslant 1$ *отображается квазиконформно на кольцо* $\rho \leqslant |w| \leqslant 1$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\left|\ln\frac{r}{\rho}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{r\leqslant|z|\leqslant 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z. \tag{2}$$

Доказательство этой леммы восходит к Грётшу ([3]), который формулировал ее для случая $p(z) \leqslant q = \text{const}$.

Лемма 2. *Пусть двухсвязная область, ограниченная кривыми* Γ_1 *и* Γ_2, *лежащими, соответственно, в кольцах* $\frac{r}{1+\varepsilon} \leqslant |z| \leqslant r(1+\varepsilon)$ *и* $\frac{1}{1+\varepsilon} \leqslant |z| \leqslant 1+\varepsilon$, *отображается квазиконформно на кольцо* $\rho \leqslant |w| \leqslant 1$, *причем*

$$|\arg(w(z)) - \arg z|_{\text{на } \Gamma_z} < \varepsilon,$$
$$|\arg(w(z)) - \arg z - \delta| < \varepsilon.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\delta \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z + \left(1 + \frac{\ln\frac{1}{r}}{\ln\frac{1}{\rho}}\right) 2\varepsilon. \tag{3}$$

Доказательство леммы 2 похоже на доказательство леммы 1, однако с тем отличием, что рассматриваются не радиальные сечения кольца, как у Грётша, а сечения по спиралям $\rho = e^{-\varphi+\varphi_0}$.

Из лемм 1 и 2 в случае $p(z) \to 1$ при $z \to 0$ доказываемая теорема получается непосредственно, если воспользоваться свойствами квазиконформных отображений, полученными М. А. Лаврентьевым ([4]). В общем же случае нужны еще леммы, аналогичные леммам 3 и 4 из ([4]), с заменой условия $p(z) \leqslant 1 + \varepsilon$ интегральным условием.

Лемма 3. *Пусть функция $w = f(z)$ отображает квазиконформно круг $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$, причем $w(0) = 0$ и $\iint\limits_z (p(z)-1) d\sigma_z \leqslant \varepsilon$. Тогда*

$$|z| - \lambda'(\varepsilon) \leqslant |w(z)| \leqslant |z| + \lambda'(\varepsilon),$$

где $\lambda'(\varepsilon)$ зависит только от ε и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lambda'(\varepsilon) = 0$.

Доказательство опирается на лемму 1 и экстремальные свойства конформных отображений односвязных и двусвязных областей.

Из леммы 3 и общих свойств конформных отображений односвязных областей следует

Лемма 4. *Если в условиях леммы 3 $w(1) = 1$, то имеет место неравенство*

$$|w(z) - z| \leqslant \lambda(\varepsilon),$$

где $\lambda(\varepsilon)$ зависит только от ε и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lambda(\varepsilon) = 0$.

Лемма 5. *Пусть функция $w = f(z)$ определена, ограничена и осуществляет квазиконформное отображение области $0 < |z| \leqslant 1$, причем*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \iint\limits_{|z|\leqslant r} (p(z) - 1)\, d\sigma_z = 0.$$

Тогда как прямое, так и обратное отображения будут квазиконформными в точке $z = 0$ с $p(0) = 1$, т. е. бесконечно малый круг переходит в круг с сохранением на нем угловых расстояний.

Доказательство этой леммы в основной своей части аналогично доказательству леммы 4 из работы ([4]).

Поступило
21 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Wittich, Math. Z., 51: 6, 278 (1949). [2] Б. Шабат, Матем. сборн., 17, (59) : 2, 193 (1946). [3] H. Grötzsch, Ber. Sachs. Acad. Wiss., 80, 503 (1928). [4] М. Лаврентьев, Матем. сборн., 42 : 4, 407 (1935).