Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 1

ГЕОФИЗИКА

П. С. ЛИНЕЙКИН

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОЛЕНОСТИ В МЕЛКОВОДНОМ МОРЕ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 28 IV 1953)

Вопрос о распределении солености в морском бассейне в зависимости от элементов водного и солевого баланса относится к числу неразработанных вопросов современной физики моря. Основываясь на известных методах математической физики, можно составить уравнение, определяющее значение солености s как функции координат x, y точек поверхности моря и времени t. Мы предполагаем при этом, что глубины моря $H(x, y)$ малы, так что перемешивание вод по вертикали распространяется до дна и приводит к полной однородности во всех точках вертикального столба жидкости.

Пусть известны составляющие $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ скорости морских течений, объем осадков $q_1(x, y, t)$ и объем испарения $q_2(x, y, t)$, отнесенных к единичной площади поверхности моря и единице времени. Возвышение уровня моря $\eta(x, y, t)$ изменяется в зависимости от указанных величин. Рассматривая приток и убыль воды через боковые стенки и поверхность элементарного объема, представляющего вертикальный столб от дна до поверхности моря с площадью основания $dx\,dy$, легко составить уравнение для возвышения $\eta(x, y, t)$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = q_1 - q_2 - \frac{\partial}{\partial x} Hu - \frac{\partial}{\partial y} Hv. \tag{1}$$

Это уравнение совершенно аналогично уравнению неразрывности в теории длинных волн.

Учитывая, что солевые массы в море переносятся течениями и турбулентной диффузией, можно также подсчитать изменение массы соли m, содержащейся в элементарном столбе жидкости:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(us - k\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(vs - k\frac{\partial s}{\partial y}\right)\right] dx\,dy. \tag{2}$$

Здесь k — коэффициент горизонтального турбулентного обмена в море.

Так как соленость $s = m/\tau$, где $\tau = (H + \eta)\,dx\,dy$ есть объем столба, то с высокой степенью точности имеем

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{s}{H}\frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{3}$$

Отсюда, по (1) и (2):

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{q_1 - q_2}{H} s = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(kH\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(kH\frac{\partial s}{\partial y}\right)\right]. \tag{4}$$

Это несколько обобщенное уравнение турбулентной диффузии в подвижной среде. Осадки и испарение влияют на соленость как источники мощности $\mp \frac{q}{H} s$, распределенные по всей поверхности моря.

Примем следующие граничные условия для интегрирования уравнения (4) в заданной области (Σ):

1) равенство солевых потоков, поступающих извне и входящих внутрь области на тех участках контура Γ', где имеется приток или сток воды, т. е. у проливов и в устьях рек:

$$\sigma_i \left(v_n s - k \frac{\partial s}{\partial n} \right)_i = \sigma_e \left(v_n s - k \frac{\partial s}{\partial n} \right)_e ; \tag{5}$$

2) отсутствие солевых потоков на береговой черте Γ'':

$$\frac{\partial s}{\partial n} = 0. \tag{6}$$

Индексы i, e указывают на положение точек внутри и вне области, в непосредственной близости к ее границе; σ — площади поперечных сечений потоков жидкости.

Правая часть формулы (5) содержит величины площади сечения σ_e, скорости u_e потока, солености s_e и ее нормальной производной а также коэффициента обмена k_e за пределами области. Все эти величины, равно как и k, q_1, q_2, u, v внутри области должны быть заданы для решения задачи.

Так как на практике мы далеко не всегда располагаем данными для всех перечисленных величин, возникает необходимость в указании приближенного метода определения солености. Для этой цели найдем изменение полной массы соли M и объема моря V. Производные этих величин по времени можно определить интегрированием по области (Σ) уравнений (1) и (2):

$$\frac{dV}{dt} = Q_1 - Q_2 + \int_{\Gamma} H v_{n_i} \, dl, \tag{7}$$

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Gamma} H \left(v_{n_i} s - k \frac{\partial s}{\partial n_i} \right) dl. \tag{8}$$

Здесь Q_1 и Q_2 — соответственно, полный объем осадков и испарения для всей поверхности моря за единицу времени.

Найдем изменение средней солености моря $\bar{s}$:

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{M}{V} \right) = \frac{1}{V} \frac{dM}{dt} - \frac{\bar{s}}{V} \frac{dV}{dt}, \tag{9}$$

или, по (7) и (8):

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} H v_{n_i} (s - \bar{s}) \, dl - \frac{Q_1 - Q_2}{H} \bar{s}. \tag{10}$$

При этом мы пренебрегаем вторым членом под знаком интеграла в (8) сравнительно с первым, так как диффузионный поток на границах морского бассейна весьма мал сравнительно с адвекцией, вызванной течениями в проливе или реке.

Рассмотрим теперь функцию $s'(x, y, t)$, удовлетворяющую тому же уравнению, что и s при $u = v = 0$:

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \frac{q_1 - q_2}{H} s' = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(kH \frac{\partial s'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(kH \frac{\partial s'}{\partial y} \right) \right]. \tag{11}$$

Если вместе с этим упростить (2), полагая и там $u = v = 0$, и затем определить изменение полной массы соли M', то получим:

$$\frac{dM'}{dt} = - \int_{\Gamma} Hk \frac{\partial s}{\partial n_i} dl. \tag{12}$$

Сохраняя уравнение неразрывности (1), мы сохраним тем самым и (8). Для изменения средней величины $\bar{s}'$ для всего объема V получим теперь:

$$\frac{d\bar{s}'}{dt} = -\frac{1}{V}\int\limits_{\Gamma} Hk\frac{\partial s'}{\partial n_i}dl - \frac{Q_1 - Q_2}{H}\bar{s}'. \tag{13}$$

Если принять, что на контуре Г выполняются условия

$$-k\frac{\partial s'}{\partial n_i} = v_{n_i}(s' - \bar{s}') \qquad (\Gamma'); \tag{14}$$

$$-k\frac{\partial s'}{\partial n_i} = 0 \qquad (\Gamma''), \tag{15}$$

то уравнения (13) и (10) полностью совпадают. Следовательно, если вместо точного значения солености s определять s' из упрощенного уравнения (13) при граничных условиях (14) и (15), то мы получим приближенное решение задачи об определении солености как функции координат и времени, причем среднее значение $\bar{s}'$ для всего морского бассейна совпадает с точным значением $\bar{s}$.

Таким образом, мы предлагаем приближенный способ решения задачи, основанный на удовлетворении граничных условий «в среднем». Этот способ не требует знания скоростей течений в море и дает удовлетворительные результаты в случае, когда эти скорости малы.

Если положить $\sigma_i = Hl$, где l есть соответствующий отрезок контура области (Σ), и ввести в рассмотрение величину расхода воды $w = \sigma v_n$, то условие (14) можно записать в более удобном для практических расчетов виде:

$$-\frac{\partial s'}{\partial n} = \frac{w}{kHl}(s' - \bar{s}'). \tag{16}$$

Некоторые расчеты распределения солености в морском бассейне, произведенные на основе уравнения (11) и условий (15), (16), подтверждают применимость предлагаемой теории.

Государственный океанографический институт

Поступило 22 IV 1953