Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 1

ФИЗИКА

Б. Т. ГЕЙЛИКМАН

К ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 2 III 1953)

В ([1]) было исследовано псевдоскалярное поле, взаимодействующее с покоящимися тяжелыми частицами конечной массы m. Расчеты были проведены с формально релятивистским выражением для энергии взаимодействия поля и частиц $H_{\text{вз}}$ (без перехода в явном виде к нерелятивистскому приближению). Для сравнения со случаем бесконечно тяжелых частиц и учета в дальнейшем движения тяжелых частиц (см. (8)) целесообразно рассмотреть ту же задачу, пользуясь также нерелятивистским приближением для $H_{\text{вз}}$. Гамильтониан в этом случае для n покоящихся частиц имеет вид ([2]):

$$H = \frac{1}{2}\int \sum_{\alpha}^{3} \left(\Pi_\alpha^2 + c^2 (\nabla\Phi_\alpha)^2 + c^2\varkappa^2\Phi_\alpha^2 - 2\sqrt{4\pi}\, gc \sum_{j}^{n} O_{\alpha j}\Phi_\alpha\right) d\mathbf{r} +$$

$$+ \frac{2\pi}{m}\sum_{j}^{n}\left[L_j^2 + N_j^2 + i\,(N_j L_j - L_j N_j)\right] + E_k; \qquad (1)$$

$$O_{\alpha i} = \tau_{\alpha i}\varkappa^{-1}(\vec{\sigma}_i, \nabla U_i); \qquad L_i = g_{ps}\int \sum_{\alpha} \Phi_\alpha \tau_{\alpha i} U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\, d\mathbf{r};$$

$$N_i = g_{pv}(\varkappa c)^{-1}\int \sum_{\alpha} \Pi_\alpha \tau_{\alpha i} U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\, d\mathbf{r};$$

$E_k = 2\pi g_{pv}^2 \varkappa^{-2}\int \sum_{i} U_i^2\, d\mathbf{r}$ — энергия, связанная с так называемыми «контактными» членами ([3]); $g = g_{pv} + g_{ps}\mu/2m$; в (1) отброшены члены порядка E/nmc^2 относительно выписанных.

Ради простоты рассмотрим симметричную теорию ($\tau_3 = \tau_z$).

Чтобы найти классическую часть Φ_α и Π_α ([1,4]), допустим сначала что Φ_α и Π_α в H заменены классическими величинама φ_α^0 и π_α^0 (при этом $H = H^0$). Уравнения для φ_α^0 и π_α^0 найдем из условия минимума энергии системы E^0:

$$\delta E^0 = \delta\left\{(\psi^{0*}(s_1, \ldots, s_n), H^0\psi^0(s_1, \ldots, s_n))(\psi^{0*}, \psi^0)^{-1}\right\} = 0.$$

При этом получаем:

$$(\varkappa^2 - \Delta)\,\varphi_\alpha^0 - \frac{g\sqrt{4\pi}}{c}\sum_i \langle O_{\alpha i}\rangle + 4\pi g_{ps}^2 (mc^2)^{-1}\sum_i U_i \int \varphi_\alpha^0 U_i\, d\mathbf{r} +$$

$$+ \frac{4\pi g_{ps} g_{pv}}{m\varkappa c^2}\sum_i U_i \int [\vec{\pi}^0, \langle\vec{\tau}_i\rangle]_\alpha U_i\, d\mathbf{r} = 0;$$

$$\pi_\alpha^0 + \frac{4\pi g_{pv}^2}{m\varkappa^2 c^2}\sum_i U_i \int \pi_\alpha^0 U_i\, d\mathbf{r} + \frac{4\pi g_{ps} g_{pv}}{m\varkappa c}\sum_i U_i \int [\langle\vec{\tau}_i\rangle\, \vec{\varphi}^0]_\alpha U_i\, d\mathbf{r} = 0; \qquad (2)$$

$\langle\tau_{\alpha i}\rangle = (\psi^{0*}, \tau_{\alpha i}\psi^0)(\psi^{0*}, \psi)^{-1}$, $\langle\vec{\tau}_i\rangle = \{\langle\tau_{1i}\rangle, \langle\tau_{2i}\rangle, \langle\tau_{3i}\rangle\}$; $\vec{\varphi}^0 = \{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0\}$ и т. д.,

ψ-функции ψ^0 зависят лишь от переменных обычного и изотопического спина $s_1, \ldots, s_n$ и удовлетворяют уравнению Шредингера $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$.

Заметим, что уравнения, аналогичные (2), для формально релятивистского выражения:

$$H_{\text{рел}} = {}^1/_2 \int \sum_{\alpha}^{3} [\Pi_\alpha^2 + c^2 (\nabla\Phi_\alpha)^2 + c^2\varkappa^2\Phi_\alpha^2 - 2c\sqrt{4\pi} \sum_{i}^{n} (G_{\alpha i}\Phi_\alpha + F_{\alpha i}\Pi_\alpha) + $$
$$+ 4\pi c^2 \sum_{i,j}^{n,n} F_{\alpha i}F_{\alpha j}]\, d\mathbf{r} \tag{3}$$

(см. (1), (8) в ([1]); здесь добавлены лишь опущенные в ([1]) «контактные» члены, см. ([3])) имеют вид:

$$(\varkappa^2 - \Delta)\,\varphi_\alpha^0 = \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \sum_j \langle G_{\alpha j}\rangle; \quad \pi_\alpha^0 = c\sqrt{4\pi} \sum_j \langle F_{\alpha j}\rangle; \tag{4}$$

$$G_{\alpha j} = -i\beta_j\gamma_{5j}\tau_{\alpha j}g_{ps}U(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) + (g_{pv}/\varkappa)\,\tau_{\alpha j}(\vec{\sigma}_j, \nabla U_j);$$

$$F_{\alpha j} = (g_{pv}/\varkappa c)\,\gamma_{5j}\tau_{\alpha j}U(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j).$$

Из (2) находим:

$$\pi_\alpha^0 = \frac{4\pi g_{pv}g_{ps}}{m\varkappa c} \sum_{i,j} U_i\, d_{ij} \int [\vec{\varphi}^0, \langle\vec{\tau}_j\rangle]_\alpha\, U_j\, d\mathbf{r};$$

$$\varphi_\alpha^0 = \sum_i f_{\alpha i} + \frac{g_{ps}^2}{mc^2} \sum_i h_i \Big\{ -\int \varphi_\alpha^0\, U_i\, d\mathbf{r} + \Big[\langle\vec{\tau}_i\rangle, \Big[\int \vec{\varphi}^0 U_i\, d\mathbf{r},\ \langle\vec{\tau}_i\rangle\Big]\Big]_\alpha +$$
$$+ \sum d_{ij} \Big[\langle\vec{\tau}_i\rangle, \Big[\langle\vec{\tau}_j\rangle, \int \vec{\varphi}^0 U_j' d\mathbf{r}\Big]\Big]_\alpha \Big\}; \tag{5}$$

здесь $f_{\alpha i} = \frac{g}{c\sqrt{4\pi}} \int \langle O_{\alpha i}\ (\mathbf{r}') \rangle \frac{e^{-\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\mathbf{r}'; h_i = \int U_i(\mathbf{r}') \frac{e^{-\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\mathbf{r}';$ d_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} детерминанта D n-го ранга, деленное на D; $D = \| a_{ij} \|$; $a_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi g_{pv}^2}{m\varkappa^2 c^2} \int U_i U_j\, d\mathbf{r}$.

Решение системы интегральных уравнений (5) для φ_α^0 с вырожденными ядрами легко найти ([5]). Оно имеет вид: $\varphi_\alpha^0 = \sum_i (f_{\alpha i} + A_{\alpha i}h_i)$. Выражения для $A_{\alpha i}$ мы не выписываем ввиду их громоздкости. Для одной частицы ($n = 1$):

$$\varphi_\alpha^0 = f_\alpha + h\Big(1 + \frac{g_{ps}^2}{mc^2}\int hU\, d\mathbf{r} - B\langle\vec{\tau}\rangle^2 \int hU\, d\mathbf{r}\Big)^{-1} \Big\{\Big[B\langle\vec{\tau}\rangle^2 -$$
$$- \frac{g_{ps}^2}{mc^2}\Big]\int f_\alpha U\, d\mathbf{r} - \langle\tau_\alpha\rangle B \sum_\beta \langle\tau_\beta\rangle \int f_\beta U\, d\mathbf{r}\Big(1 + \frac{g_{ps}^2}{mc^2}\int hU\, d\mathbf{r}\Big)^{-1}\Big\}; \tag{6}$$

здесь $B = 4\pi\Big(\frac{g_{ps}g_{pv}}{m\varkappa c^3}\Big)^2 \int U^2\, d\mathbf{r}\Big(1 + \frac{4\pi g_{pv}^2}{m\varkappa^2 c^2}\int U^2\, d\mathbf{r}\Big)^{-1}$.

Подставив выражения для φ_α^0 и π_α^0 в уравнение $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$, получаем формально нелинейную систему уравнений для $4n$ компонент ψ^0. Однако практически можно, как и для (3) в ([4]) и ([1]), решать соответствующую линейную систему, заменяя в H^0 средние значения $\langle\tau_\alpha\rangle$, $\langle\tau_\alpha\sigma_x\rangle$ и т. д. численными параметрами η_α, $\xi_{\alpha x}$, не зависящими от ψ^0; затем полученные собственные значения $E_\lambda^0(\eta_\alpha, \xi_{\alpha x})$ должны быть минимизированы по η_α, $\xi_{\alpha x}$. Действительно, легко показать (это видно и из (2) и (4), что минимизация E^0 приводит к уравнениям $\eta_\alpha = \langle\tau_\alpha\rangle$ и т. д. Значения E_λ^0 для такой задачи при $n = 1$ и $m = \infty$

были найдены в [6]. Общее выражение E_λ^0 в случае $H_{\text{рел}}$ находим из (3) и (4) (см. [1]):

$$E_\lambda^0 = 2\pi c^2 \sum_{\alpha,i,j} \int [|F_{\alpha i}(\mathbf{r}) F_{\alpha j}(\mathbf{r})|_{\lambda\lambda} - |F_{\alpha i}(\mathbf{r})|_{\lambda\lambda} |F_{\alpha j}(\mathbf{r})|_{\lambda\lambda}]\, d\mathbf{r} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\alpha,i,j} \int |G_{\alpha i}(\mathbf{r})|_{\lambda\lambda} |G_{\alpha j}(\mathbf{r}')|_{\lambda\lambda} \frac{e^{-\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' + \sum_i |\beta_i|_{\lambda\lambda} mc^2. \qquad (7)$$

Здесь $|F_{\sigma i}|_{\lambda\lambda} = \langle F_{\alpha i}\rangle$ с $\psi^0 = \psi_\lambda^0$.

Обозначим H_λ^0 гамильтониан H^0, в который подставлены значения η_α, $\xi_{\alpha r}$, соответствующие минимуму E_λ^0; тогда собственные функции уравнения $H_\lambda^0 \psi_{\lambda\mu}^0 = E_{\lambda\mu}^0 \psi_{\lambda\mu}^0$ образуют полную ортогональную систему $(\mu = \lambda, \ldots, \lambda + 4n - 1)$. Возвращаясь к гамильтониану H (1), предположим, что $\Phi_\alpha = \varphi_{\alpha\lambda}^0 + \varphi_{\alpha\lambda}$; $\Pi_\alpha = \pi_{\alpha\lambda}^0 + \pi_{\alpha\lambda}$; $\varphi_\alpha \ll \varphi_\alpha^0$. Тогда:

$$H = H_\lambda^0 + H'; \quad H' = H^{(1)} + H^{(2)};$$

$$H^{(1)} = gc\sqrt{4\pi} \sum_{\alpha,i} \int \varphi_\alpha (|O_{\alpha i}|_{\lambda\lambda} - O_{\alpha i})\, d\mathbf{r} + \frac{4\pi g_p g_{pv}}{m\varkappa c} \Big\{ \sum_i (\vec{\tau}_i -$$

$$- \{\vec{\tau}\}_{\lambda\lambda}, \Big[\int \vec{\varphi}^0 U_i\, d\mathbf{r}, \int \vec{\pi} U_i\, d\mathbf{r}\Big]\Big) + \sum_i \Big(\vec{\tau}_i - \{\vec{\tau}_i\}_{\lambda\lambda}, \Big[\int \vec{\varphi} U_i\, d\mathbf{r}, \int \vec{\pi}^0 U_i\, d\mathbf{r}\Big]\Big)\Big\};$$

$$H^{(2)} = \frac{1}{2} \int \sum_\alpha [\pi_\alpha^2 + c^2(\varkappa^2 - \Delta)\varphi_\alpha]\, d\mathbf{r} + \frac{2\pi}{m} \Big\{ \Big(\frac{g_{pv}}{\varkappa c}\Big)^2 \sum_{\alpha,i} \Big(\int \pi_\alpha U_i\, d\mathbf{r}\Big)^2 +$$

$$+ g_{ps}^2 \sum_{\alpha,i} \Big(\int \varphi_\alpha U_i\, d\mathbf{r}\Big)^2 + 2\frac{g_{ps} g_{pv}}{\varkappa c} \sum \Big(\vec{\tau}_i, \Big[\int \vec{\varphi} U_i\, d\mathbf{r}, \int \vec{\pi} U_i\, d\mathbf{r}\Big]\Big)\Big\}.$$

Для $H_{\text{рел}}$: $\quad H_{\text{рел}}^{(1)} = c\sqrt{4\pi} \int \sum_{\alpha,i} [(|G_{\alpha i}|_{\lambda\lambda} - G_{\alpha i})\varphi_\alpha + (|F_{\alpha i}|_{\lambda\lambda} - F_{\alpha i})\pi_\alpha]\, d\mathbf{r};$

$$H_{\text{рел}}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum \int [\pi_\alpha^2 + c^2(\varkappa^2 - \Delta)\varphi_\alpha]\, d\mathbf{r}.$$

Будем искать ψ-функцию системы в виде: $\psi_\lambda' = \sum_\mu [\chi_\lambda^0(q_k)\delta_{\lambda\mu} + \chi_{\lambda\mu}'(q_k)]\, \psi_{\lambda\mu}^0(s_1, \ldots, s_n)$; $\chi_{\lambda\mu}' \ll \chi_\lambda^0$. Пользуясь теорией возмущений (см. [4]), найдем с точностью до членов 2-го порядка относительно φ_α уравнение для χ_λ^0 (в отсутствие вырождения):

$$H_{\lambda 2}\chi_\lambda^0 = \Big\{H_{\lambda\lambda}' + \sum_{\mu\neq\lambda} H_{\lambda\mu}^{(1)} H_{\mu\lambda}^{(1)} (E_\lambda^0 - E_{\lambda\mu}^0)^{-1}\Big\} \chi_\lambda^0 = E_\lambda' \chi_\lambda^0; \quad H_{\lambda\lambda}' = H_{\lambda\lambda}^{(2)},$$

так как $H_{\lambda\lambda}^{(1)} = 0$; $E_\lambda' \simeq E_{\lambda 2, n_k} = \sum_{k,\rho} (n_{k\rho} + 1/2)\hbar\omega_k$ (см. [4]).

Заметим, что в энергии взаимодействия тяжелых частиц E_λ^0 помимо членов, переходящих в юкавовское взаимодействие при $r_{ij} > \varkappa^{-1}$ (и отличных от него при $r_{ij} < \varkappa^{-1}$, см. [1]; эти члены получаются из тех слагаемых в H^0, которые содержат только φ^0), имеются слагаемые (получающиеся из членов в H^0, содержащих π^0, и из контактных членов в случае $H_{\text{рел}}$) «δ-функционного» типа $\sim \int U_i U_j\, d\mathbf{r}$ с радиусом действия, равным радиусу тяжелой частицы a (см. (4), (5) и (7)).

Далее, нетрудно видеть, что при $g_{ps} \approx g_{pv}$ в выражении φ_α^0 (5), (6) отношение членов, исчезающих при $m \to \infty$, к членам, отличным от нуля при $m \to \infty$, порядка $g^2(amc^2)^{-1}$ и $\pi^0/\varkappa c \approx (g^2/\varkappa^2 a^3)[(mc^2/4\pi) + (g^2/\varkappa^2 a^3)]^{-1}\varphi^0$. При $g_{ps} \ll g_{pv}$ $\varphi_\alpha^0 \approx f_\alpha$ и $\pi_\alpha^0 \approx 0$, как при $m = \infty$, а при $g_{pv} \ll g_{ps}$ $\pi_\alpha^0 \approx 0$, для φ_α^0 же надо пользоваться точным выражением (6), так как в этом случае $\varphi_\alpha^0 \approx 0$ при $m = \infty$. При $(g^2/amc^2) \to 0$

E_λ^0 переходит в E_λ^0 для бесконечно тяжелых частиц: (4) в ([4]) и (9) в ([1]), и гамильтониан $H_{\lambda 2}$ для квантованного поля φ_α переходит в $H_{\lambda 2}$ для поля φ_α при $m \to \infty$: (6) в ([4]).

Заметим, что члены порядка (g^2/amc^2) в выражении (6) для φ_α^0 весьма существенны при вычислении магнитного момента тяжелой частицы (см. (11) в ([4])).

Следует иметь в виду, что в (1) можно пренебрегать отброшенными членами, если только $E_\lambda^0 \ll mc^2$ (при $n=1$), т. е. если $(g^2/a^3\varkappa^2) \ll \ll mc^2$ (так как $E_\lambda^0 \approx g^2/a^3\varkappa^2$, см. ([4])). Если же $mc^2 \approx g^2/\varkappa^2 a^3$, что, по-видимому, больше соответствует действительности, то надо пользоваться формально релятивистским выражением $H_{\text{рел}}$ (3) и формулами (4), (7) для φ_α^0, π_α^0, E_λ^0.

Перейдем теперь к движущимся тяжелым частицам. Гамильтониан в этом случае имеет вид:

$$H_{\text{д}} = H + T + T'; \quad T = \sum_i^n p_i^2/2m; \tag{8}$$

$$T' = \frac{g_{pv}\sqrt{\pi}}{m\varkappa c} \sum_{\alpha,\, i} \tau_{\alpha i} \int [(\vec{\sigma}_i, \mathbf{p}_i) U_i + U_i (\vec{\sigma}_i, \mathbf{p}_i)] \Pi_\alpha d\mathbf{r}; \quad \Pi_\alpha = \pi_{\alpha\lambda}^0 + \pi_{\alpha\lambda}; \quad T' \ll T.$$

Точные функции гамильтониана H: $\psi_{\lambda,\, n_k} = \psi_\Lambda = \sum \chi_{\lambda\mu}(q_k)\, \psi_{\lambda\mu}^0 (s_i)$ образуют полную ортогональную систему. Будем искать Ψ-функции Ψ_Λ гамильтониана $H_{\text{д}}$ в виде $\Psi_\Lambda = \sum\limits_{\text{M}} u_{\Lambda\text{M}} (\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_n)\, \psi_{\text{M}}$. В адиабатическом приближении можно принять: $u_{\Lambda\text{M}} = u_\Lambda^0 \delta_{\Lambda\text{M}} + u'_{\Lambda\text{M}}$; $u'_{\Lambda\text{M}} \ll u_\Lambda^0$. Подставив Ψ_Λ в уравнение $H_{\text{д}}\Psi_\Lambda = E_{\text{д}\Lambda}\Psi_\Lambda$, получим ([4,7]): $|Tu_\Lambda^0|_{\text{M}\Lambda} + |T'u_\Lambda^0|_{\text{M}\Lambda} + \sum\limits_{\text{M}'} [|Tu'_{\Lambda\text{M}'}|_{\text{MM}'} + |T'u'_{\Lambda\text{M}'}|_{\text{MM}'}] = \delta_{\Lambda\text{M}} (E_{\text{д}\Lambda} - E_\Lambda(\mathbf{r}_i))\, u_\Lambda^0 + (E_{\text{д}\Lambda} - E_{\text{M}}(\mathbf{r}_i))\, u'_{\Lambda\text{M}}$;

здесь $|Tu'_{\Lambda\text{M}'}|_{\text{MM}'} = \int (\psi_{\text{M}}^*, Tu_{\Lambda\text{M}'}\psi_{\text{M}'}) \prod\limits_{k',\rho} dq_{k\rho}$ и т. д.; $E_\Lambda(\mathbf{r}_i) = E_\lambda^0(\mathbf{r}_i) + E_{\lambda,\, n_k}$ — собственные значения гамильтониана H. Отсюда находим уравнение для u_Λ^0 с точностью до членов 2-го порядка:

$$|Tu_\Lambda^0|_{\Lambda\Lambda} + |T'u_\Lambda^0|_{\Lambda\Lambda} + \sum_{\text{M} \neq \Lambda} \{T(E_\Lambda - E_{\text{M}})^{-1} |Tu_\Lambda^0|_{\text{M}\Lambda}\}_{\Lambda\text{M}} + E_\Lambda(\mathbf{r}_i)\, u_\Lambda^0 = E_{\text{д}\Lambda} u_\Lambda^0$$

и выражение для $u'_{\Lambda\text{M}}$ $(\Lambda \neq \text{M})$: $u'_{\Lambda\text{M}} = (E_\Lambda - E_{\text{M}})^{-1} |Tu_\Lambda^0|_{\text{M}\Lambda}$. Для $H_{\text{рел}}$ (3) также может быть развита адиабатическая теория возмущений (при этом $T = \sum\limits_i c(\vec{\alpha}_i, \mathbf{p}_i)$), но область ее применимости уже.

В уравнении для u_Λ^0 помимо статического взаимодействия тяжелых частиц $E_\Lambda(\mathbf{r}_i)$ содержится взаимодействие, зависящее от скоростей: $|T'u_\Lambda^0|_{\Lambda\Lambda}$ и $\sum\limits_{\text{M}} \{T(E_\Lambda - E_{\text{M}})^{-1} |Tu_\Lambda^0|_{\text{M}\Lambda}\}_{\Lambda\text{M}}$.

Зная Ψ_Λ и $u_{\Lambda\text{M}}$, можно рассмотреть упругое и неупругое рассеяние двух тяжелых частиц ($n = 2$, $n_{k\rho} = 0$ или $\neq 0$), рассеяние мезона на тяжелой частице с учетом ее отдачи ($n = 1$, $n_{k\rho} = 1$) и т. д.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
22 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Гейликман, ДАН, 90, № 5 (1953). [2] В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ, 21, 1313 (1951). [3] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc., A, 166, 127 (1938). [4] Б. Гейликман, ДАН, 90, № 3 (1953). [5] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, 1952, стр. 50. [6] W. Pauli, S. Dancoff, Phys. Rev., 62, 85 (1942). [7] В. Паули, Общие принципы волновой механики, 1947, стр. 141.