Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

Я. В. ШЕВЕЛЕВ

# ПУАЗЕЙЛЕВО ТЕЧЕНИЕ В НЕСИММЕТРИЧНОМ КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ. АНАЛОГИЯ С КРУЧЕНИЕМ БАЛКИ

*(Представлено академиком Л. Д. Ландау 25 IV 1953)*

Рассматриваемая задача поставлена М. Д. Кузнецовым [1], который пришел к выводу, что можно уменьшить гидравлическое сопротивление трубы, если эксцентрично поместить в ней круглую вставку малого диаметра. Однако этот вывод связан с ошибкой и получился лишь потому, что Кузнецов пренебрег угловой производной в исходном уравнении. Ниже приводится расчет расхода через несимметричный кольцевой зазор с неподвижными, а также движущимися поступательно ограничивающими его трубами: внешней и внутренней (вставкой). При этом рассмотрен вопрос о применимости аналогии с кручением балки [2] в случае многосвязной области и использовано решение задачи о кручении круглого бруса с круглым эксцентрично расположенным отверстием, данное Макдональдом [3].

Скорость $v$ ламинарного потока в межтрубном пространстве можно найти из уравнения $\Delta v + \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dL} = 0$, если известны скорости поступательного движения $v_i$ внутренних труб (вставок) и внешней ($i = 0$) трубы. В уравнении $\mu$ — коэффициент вязкости; $dp/dL$—осевой градиент давления, $\Delta = \nabla^2$—оператор Лапласа.

Если решение представить в форме $v = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dL}(u - \mathbf{r}^2)$, где $\mathbf{r}$ — плоский радиус-вектор, то $u + \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$ при постоянном $\mathbf{a}$ есть гармоническая функция, которая имеет комплексно-сопряженную функцию $q$. Через $q$ можно выразить силы трения $F_i$ внутренних труб о жидкость.

Пусть $\Omega_i$ — площадь, ограниченная контуром $i$, $d\mathbf{s}$ — элемент контура с направлением по внутренней нормали, $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении оси. Тогда

$$\mathbf{k}\times\nabla q = \nabla(u + \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \nabla u + \mathbf{a},$$

$$F_i = \oint_i (\mu\nabla v)\, d\mathbf{s} = \frac{dp}{dL}\oint_i \frac{1}{4}(-\nabla\mathbf{r}^2 + \mathbf{k}\times\nabla q - \mathbf{a})\, d\mathbf{s} = \frac{dp}{dL}\left(\Omega_i + \oint_i \frac{\nabla q}{4}\, d\mathbf{r}\right);$$

формула для $F_i$ показывает, что $-\frac{dp}{dL}\oint_i \frac{\nabla q}{4}\, d\mathbf{r}$ есть избыточная сила, приложенная к трубе (вставке) для того, чтобы уравновесить разницу между силой $\frac{dp}{dL}\Omega_i$, действующей на ее торцы, и силой трения о жидкость. Если все вставки свободно увлекаются жидкостью, то $\oint_i \nabla q\, d\mathbf{r} = 0$, и $q$ — однозначная функция. В этом случае имеет место аналогия между течением жидкости и кручением балки, имеющей форму текущей жидкости. Аналогия эта, как известно, заключается в том, что при некотором выборе **a** функция $-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dL}q$ превращается в $\Phi$ — функцию Сен-Венана, которая описывает осевые смещения точек скручиваемой балки ($d\varphi/dL$ — угол кручения). Касательные напряжения $\vec{\tau}$ выражаются через функцию $\vec{\Phi}$ по формуле $\vec{\tau}=G\left[\frac{d\varphi}{dL}\mathbf{k}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{ц}})-\nabla\Phi\right]$, где $G$ — модуль сдвига и точка $\mathbf{r}_{\text{ц}}$ — центр кручения. Полагая $\Phi=-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dL}q$ и $\mathbf{a}=-2\mathbf{r}_{\text{ц}}$, получим для $\vec{\tau}$ выражение:

$$\vec{\tau}=G\frac{d\varphi}{dL}\left[\mathbf{k}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{ц}})+\frac{1}{2}\nabla q\right]=G\frac{d\varphi}{dL}\mathbf{k}\times\left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{ц}})-\frac{1}{2}\nabla u+\mathbf{r}_{\text{ц}}\right],$$

$$\vec{\tau}=G\frac{d\varphi}{dL}\mathbf{k}\times\nabla(\mathbf{r}^2-u)\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\mathbf{r}^2-u$ не меняется вдоль границы, $\vec{\tau}$ не имеет на границе нормальной составляющей, а это вместе с однозначностью и гармоничностью $q$ обосновывает отождествление $\Phi$ и $-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dL}q$. Крутящий момент $M$, приложенный к балке, нетрудно при наличии аналогии связать с расходом жидкости $Q$. Действительно,

$$dM=\mathbf{k}(\mathbf{r}\times\vec{\tau})\,d\Omega=G\frac{d\varphi}{dL}\frac{-4\mu}{dp/dL}\mathbf{k}\left[\mathbf{r}\times\left(\mathbf{k}\times\frac{1}{2}\nabla v\right)\right]d\Omega,$$

$$dM=G\frac{d\varphi}{dL}\frac{4\mu}{dp/dL}\left[v-\frac{1}{2}\nabla(v\mathbf{r})\right]d\Omega,$$

$$M=G\frac{d\varphi}{dL}\frac{4\mu}{dp/dL}\left[\int v\,d\Omega-\frac{1}{2}\oint v\mathbf{r}\,ds\right],$$

$$K\equiv\frac{M}{G\,d\varphi/dL}=\frac{4\mu}{dp/dL}\left[Q+\sum_{i\neq 0}v_i\Omega_i-v_0\Omega_0\right]. \qquad (1)$$

Если имеется решение задачи о течении жидкости, то для вычисления $K$ — жесткости балки при кручении — необходимо определить значения $v_i$, при которых имеет место аналогия, т. е. $q$ становится однозначной функцией, и воспользоваться формулой (1).

Если, наоборот, решена задача о кручении балки, то для вычисления расхода жидкости необходимо: 1) найти функцию $\Psi$, комплексно сопряженную с $\Phi$; найти **a**, при котором $\frac{2}{d\varphi/dL}\Psi-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{r}^2$, т. е. $u-\mathbf{r}^2$, не меняется вдоль границы, и определить значения $u_i-\mathbf{r}_i^2$ на всех контурах; 2) определить расход для безнапорного течения с известными граничными скоростями $v_i$; это будет линейная комбинация $\sum A_i v_i$. После этого расход жидкости при произвольных граничных скоростях вычисляется по формуле

$$Q=\sum_i A_i v_i+\frac{dp/dL}{4\mu}\left[\frac{M}{G\,d\varphi/dL}-\sum_i(\Omega_i+A_i)(u_i-\mathbf{r}_i^2)+2\Omega_0(u_0-\mathbf{r}_0^2)\right]. \qquad (2)$$

В работе Макдональда [3] о кручении круглой балки с эксцентричным круглым отверстием решение дано в форме

$$\Psi=\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dL}4c^2\times$$

$$\times\sum_1^{\infty}\left[(-1)^n\cos n\xi\,\frac{e^{-n\eta_2}\operatorname{cth}\eta_2\operatorname{sh}n(\eta-\eta_1)-e^{-n\eta_1}\operatorname{cth}\eta_1\operatorname{sh}n(\eta-\eta_2)}{\operatorname{sh}n(\eta_2-\eta_1)}\right], \qquad (3)$$

$$\frac{M}{G\,d\varphi/dL}=\frac{\pi}{2}(a_1^4-a_2^4)-4\pi b^2c^2\sum_1^{\infty}\frac{ne^{-n(\eta_2+\eta_1)}}{\operatorname{sh}n(\eta_2-\eta_1)}.$$

Здесь $\xi,\eta$ — биполярные координаты, связанные с декартовыми $x, y$ соотношением $x+iy=c\operatorname{tg}{}^1/_2(\xi+i\eta)$. На окружности с радиусом $a_1$, образующей внешнюю границу, $\eta=\eta_1$; на внутренней окружности (радиуса $a_2$) $\eta=\eta_2$. Расстояние между центрами 1 и 2 равно $b$. Величины $\eta_1$, $\eta_2$, $c$ находятся из уравнений

$$c=a_1\operatorname{sh}\eta_1=a_2\operatorname{sh}\eta_2=\frac{a_1a_2}{b}\operatorname{sh}(\eta_2-\eta_1). \tag{4}$$

Поскольку $\mathbf{r}^2=c^2\left|\operatorname{tg}\frac{\xi+i\eta}{2}\right|^2=c^2\left[2\operatorname{cth}\eta-1+4\operatorname{cth}\eta\sum_1^\infty(-1)^n e^{-n\eta}\cos n\xi\right]$,

$\eta>0$, и, согласно (3), $\dfrac{2\Psi_{1,2}}{d\varphi/dL}=c^2\left[4\operatorname{cth}\eta_{1,2}\sum_1^\infty(-1)^n e^{-n\eta_{1,2}}\cos n\xi\right]$,

следует положить $\mathbf{a}=0$, и тогда

$$u_{1,2}-\mathbf{r}_{1,2}^2=c^2(1-2\operatorname{cth}\eta_{1,2}). \tag{5}$$

Безнапорное движение с граничными скоростями $v_1$ и $v_2$ описывается формулой

$$v=\frac{v_2(\eta-\eta_1)-v_1(\eta-\eta_2)}{\eta_2-\eta_1}. \tag{6}$$

Расход при таком течении находится интегрированием, которое удобно вести в плоскости $\xi+i\eta$, заменив элемент площади $dx\,dy$ на $d\xi\,d\eta\left|\dfrac{d(x+iy)}{d(\xi+i\eta)}\right|^2$, т. е. на $\dfrac{d\xi\,d\eta\,c^2}{|1+\cos(\xi+i\eta)|^2}=\dfrac{c^2\,d\xi\,d\eta}{(\operatorname{ch}\eta+\cos\xi)^2}$. Получаем:

$$\int v\,dx\,dy=\int_{\eta_1}^{\eta_2}d\eta\cdot\int_0^{2\pi}d\xi\frac{c^2}{(\operatorname{ch}\eta+\cos\xi)^2}\frac{v_2(\eta-\eta_1)-v_1(\eta-\eta_2)}{\eta_2-\eta_1}=$$

$$=v_1\pi(a_1^2-a_2^2)+(v_2-v_1)\left(\frac{\pi bc}{\eta_2-\eta_1}-\pi a_1^2\right).$$

Отсюда

$$A_1=\pi a_1^2-\frac{\pi bc}{\eta_2-\eta_1},\quad A_2=\frac{\pi bc}{\eta_2-\eta_1}-\pi a_2^2. \tag{7}$$

Из (2), (3), (5) и (7) без труда находим

$$Q=v_1\pi(a_1^2-a_2^2)+(v_2-v_1)\left(\frac{\pi bc}{\eta_2-\eta_1}-\pi a_2^2\right)+$$

$$+\frac{dp/dL}{4\mu}\left[\frac{\pi}{2}(a_1^4-a_2^4)-4\pi b^2c^2\sum_1^\infty\frac{ne^{-n(\eta_2+\eta_1)}}{\operatorname{sh}n(\eta_2-\eta_1)}-\frac{2\pi b^2c^2}{\eta_2-\eta_1}\right]. \tag{8}$$

Если определить относительный эксцентриситет $\varepsilon$ и $\rho$ формулами

$$\varepsilon=\frac{b}{a_1-a_2},\quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant1;\quad \rho=\frac{a_2}{a_1},\quad 0\leqslant\rho\leqslant1, \tag{9}$$

то для $\eta_1$ и $\eta_2$ из (4), (9) получатся соотношения

$$2\operatorname{ch}\eta_1=\frac{1+\rho}{\varepsilon}+(1+\rho)\varepsilon,\quad \eta_2=\eta_1-\ln\rho+\ln[1-\varepsilon(1-\rho)e^{-\eta_1}], \tag{10}$$

а формулу для $Q$ можно представить в форме

$$Q(\rho,\varepsilon,v_1,v_2)-Q(\rho,\varepsilon,0,0)=v_1\pi a_1^2(1-\rho^2)+(v_2-v_1)\pi a_1^2\rho\left[\frac{\operatorname{sh}(\eta_2-\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}-\rho\right];$$

$$\frac{Q(\rho,\varepsilon,0,0)}{Q(0,0,0,0)}=\frac{Q(\rho,\varepsilon)}{Q_0}=1-\rho^4-4\rho^2\operatorname{sh}^2(\eta_2-\eta_1)\left[\frac{1}{\eta_2-\eta_1}+\sum_1^\infty\frac{2ne^{-n(\eta_2+\eta_1)}}{\operatorname{sh}n(\eta_2-\eta_1)}\right]; \tag{11}$$

$$Q(0,0,0,0)=Q_0=\frac{dp/dL}{\mu}\frac{\pi a_1^2}{8}.$$

Здесь $Q_0$ — расход по Пуазейлю для неподвижной трубы без вставки.

Исследуем формулу для отношения пропускных способностей трубы с эксцентричной вставкой и трубы без вставки.

$\rho \ll 1$ — вставка малого диаметра: $\frac{Q(\rho, \varepsilon)}{Q_0} \simeq 1 - \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\ln[(1-\varepsilon^2)/\rho]}$; (11а)

$1-\rho \ll 1$ — узкий кольцевой зазор: $\frac{Q(\rho, \varepsilon)}{Q_0} \simeq \frac{4}{3}(1-\rho)^3\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)$; (11б)

$\varepsilon \ll 1$ — малый эксцентриситет:

$$\frac{Q(\rho, \varepsilon)}{Q_0} \simeq 1-\rho^4-\frac{(1-\rho^2)^2}{\ln(1/\rho)}+\varepsilon^2\frac{1-\rho}{1+\rho}\left[\frac{2(1-\rho^4)}{\ln(1/\rho)}-\frac{(1-\rho^2)^2}{\ln^2(1/\rho)}-4\rho^2\right]; \quad (11в)$$

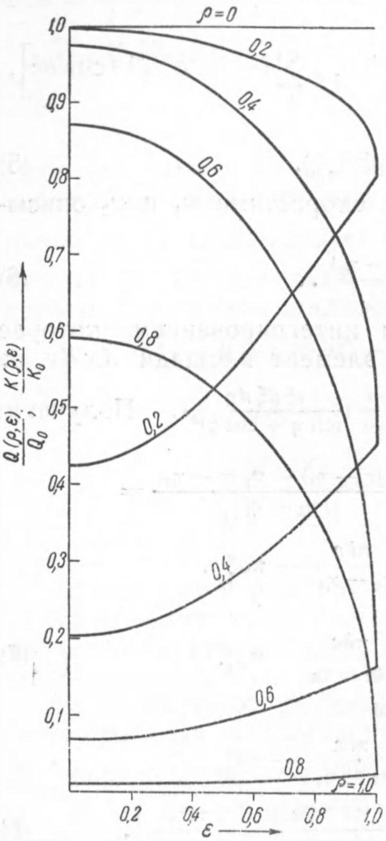


Рис. 1. Зависимость расхода жидкости через трубу от величины и положения внутренней трубы (нижние кривые). Зависимость жесткости при кручении цилиндрической балки от величины и положения цилиндрического отверстия (верхние кривые)

$\varepsilon = 1$ — вставка касается трубы:

$$\frac{Q(\rho, 1)}{Q_0} = 1-\rho^4-4\rho^2 f\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right),$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{e^y-1}\, y\, dy =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{(n+x)^2} \simeq \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+x)^2} + \quad (11г)$$

$$+ \frac{1}{N-{}^1/_2+x} - \frac{1}{12(N-{}^1/_2+x)^3} + \frac{7}{240(N-{}^1/_2+x)^5} - \frac{31}{1344(N-{}^1/_2+x)^7}.$$

Из этих формул и графика, построенного по (10), (11), (11г) (рис. 1), следует, что:

1. Расход жидкости через кольцевой зазор всегда меньше, чем через одну внешнюю трубу.

2. Эксцентричное расположение внутренней трубы сказывается тем сильнее, чем уже кольцевой зазор; в очень узком кольцевом зазоре максимальное смещение внутренней трубы приведет к увеличению расхода в 2,5 раза.

3. Изменение расхода пропорционально квадрату смещения трубы из центрального положения, если это смещение мало.

На графике нанесены также отношения жесткостей при кручении $K = \frac{M}{G\, d\varphi / dL}$ для балки с отверстием и без отверстия. При $1-\varepsilon \ll 1$

$$\frac{K(\rho, \varepsilon)}{K_0} \simeq 1-\rho^4-4\rho^2 f\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)+4\rho(1-\rho)\sqrt{2\rho(1-\varepsilon)}.$$

Это область наиболее резкой зависимости от сдвига отверстия, особенно при $1-\rho \ll 1$; в последнем случае, т. е. для тонкой трубы с предельно большой разностенностью ($\varepsilon \simeq 1$), жесткость меньше, чем для трубы с постоянной толщиной стенки ($\varepsilon = 0$) в $\frac{1,2}{(1-\rho)^2}$ раз.


Поступило
23 IV 1953


ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


[1] М. Д. Кузнецов, ДАН, 85, № 4, 715 (1952). [2] J. Boussinesq, J. de Math. (Liouville), sér. 2, 16 (1871). [3] Macdonald, Proc. Cambr. Phil. Soc., 8, p. 2, 62 (1894).