Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 2

ГЕОФИЗИКА

П. А. КИТКИН

ВОЗРАСТАНИЕ АМПЛИТУДЫ ПРИЛИВОВ НА ГЛУБИНАХ ЗАМКНУТЫХ МОРЕЙ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 8 V 1953)

Океанографические экспедиционные наблюдения свидетельствуют о наличии больших по амплитуде вертикальных колебаний на значительных глубинах морей и океанов. В океанографии такого рода движения называют «внутренними волнами». Очевидно, что изученные в теоретической литературе волны на поверхности раздела двух жидкостей разной плотности не объясняют указанного явления. Вследствие отсутствия ясности в вопросе о закономерности изменения амплитуды вертикальных колебаний, вызванных приливной силой, в жидкости неоднородной плотности приливное воздействие на движения вод внутренних морей до сих пор не изучалось.

В настоящей работе мы ставим задачу изучения особенностей движения неоднородной по плотности жидкости во вращающемся цилиндрическом бассейне под действием радиальной массовой силы, меняющейся во времени по гармоническому закону.

Выпишем следующие уравнения гидродинамики идеальной жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Omega v + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = f(r)\sin\omega t, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega u = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0; \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ur)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Здесь: u, v — горизонтальные компоненты скорости; w — вертикальная компонента скорости; $f(r)$ — массовая сила; Ω — параметр Кориолиса; p — давление; ρ — плотность; g — ускорение силы тяжести; ω — частота изменения силы $f(r)$ во времени.

Допустим, что известно изменение плотности с глубиной при покое $\rho = \rho_0(z)$. Тогда можно записать величины плотности и давления в форме:

$$\rho = \rho_0(z) + \rho'(r, z, t); \tag{6}$$

$$p = p_0 + g\int_z^H \rho_0(z)\,dz + \pi(r, z, t). \tag{7}$$

Подвергнем уравнения преобразованию Лапласа в предположении нулевых начальных условий и введем представление искомых функций и заданной функции $f(r)$ в форме следующих рядов по функциям Бесселя первого рода:

$$\left\{\begin{matrix} \bar{u}(r, z, p) \\ \bar{v}(r, z, p) \end{matrix}\right\} = \sum_n \left\{\begin{matrix} \bar{u}_n(z, p) \\ \bar{v}_n(z, p) \end{matrix}\right\} J_1\left(\alpha_n \frac{r}{L}\right); \tag{8}$$

$$\left\{\begin{matrix} \bar{w}(r, z, p) \\ \bar{\pi}(r, z, p) \\ \bar{\rho}'(r, z, p) \end{matrix}\right\} = \sum_n \left\{\begin{matrix} \bar{w}_n(z, p) \\ \bar{\pi}_n(z, p) \\ \bar{\rho}'(z, p) \end{matrix}\right\} J_0\left(\alpha_n \frac{r}{L}\right); \tag{9}$$

$$f(r) = \sum_n f_n J_1\left(\alpha_n \frac{r}{L}\right). \tag{10}$$

Черточкой сверху обозначено «изображение» функции. Так например, изображение горизонтальной компоненты скорости течения вдоль направления радиуса представляется в форме:

$$\bar{u}(r, z, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(r, z, t)\, dt. \tag{11}$$

Входящие в аргумент функции Бесселя параметры означают: L — расстояние от центра бассейна до береговой линии, а α_n — корень уравнения

$$J_1(\alpha) = 0. \tag{12}$$

Для коэффициентов рядов изображений горизонтальных компонент скорости давления и плотности получаем выражения:

$$\bar{u}_n = -\frac{L}{\alpha_n} \frac{\partial \bar{w}_n}{\partial z}, \tag{13}$$

$$\bar{v}_n = \frac{\Omega}{p} \frac{L}{\alpha_n} \frac{\partial \bar{w}_n}{\partial z}; \tag{14}$$

$$\bar{\pi}_n = -\rho_0 \frac{\omega}{\omega^2 + p^2} \frac{L}{\alpha_n} f_n + \frac{\rho_0}{\lambda^2 p} \frac{\partial \bar{w}_n}{\partial z}; \tag{15}$$

$$\bar{\rho}'_n = \frac{\rho_0 E}{p} \bar{w}_n. \tag{16}$$

Здесь

$$\lambda^2 = -\frac{\alpha_n^2}{L^2 (p^2 + \Omega^2)}; \tag{17}$$

$$E = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}. \tag{18}$$

Величина $\bar{w}_n$ определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz}\left(\rho_0 \frac{d\bar{w}_n}{dz}\right) + \lambda^2 g \rho_0 \left(E + \frac{p^2}{g}\right) \bar{w}_n = -f_n \frac{L}{\alpha_n} \frac{\omega p}{\omega^2 + p^2} E \rho_0 \lambda^2. \tag{19}$$

Таким образом, представляется возможным определить все неизвестные компоненты скорости и величины давления и плотности в зависимости от заданной величины статической плотностной стратификации E.

Для нахождения решения дифференциального уравнения для $\overline{w}_n$ устанавливаем граничные условия из соображений о равенстве давления на свободной поверхности жидкости некоторой постоянной величине и исчезновения вертикальной скорости у дна.

Для реальных условий плотностной стратификации воды в море необходимо учитывать наличие приповерхностного слоя воды однородной плотности и задание конкретного закона для изменения величины E с глубиною. Кроме того, так как абсолютная величина плотности морской воды изменяется в пределах тысячных долей единицы, уравнение (19) можно писать в упрощенном виде.

Мы вычислили $\overline{w}_n$ для случая, когда зависимость плотностной стратификации воды от глубины задана в степенной форме

$$E = \sigma z_1^m. \tag{20}$$

Уравнение (19) мы переписали в форме

$$\frac{d^2\overline{w}_n}{dz_1^2} + k^2 z_1^m (\overline{w}_n + C) = 0, \tag{21}$$

где

$$k^2 = -\frac{\alpha_n^2 gH \sigma \cdot 10^{-3}}{L^2 (p^2 + \Omega^2)}, \tag{22}$$

$$C = \frac{f_n}{g} \frac{L}{\alpha_n} \frac{\omega p}{\omega^2 + p^2}. \tag{23}$$

Вертикальная координата z_1 безразмерная и равна

$$z_1 = \frac{z}{H}. \tag{24}$$

Предполагая, что имеется приповерхностный слой воды толщиною h_1, в пределах которого $\sigma = 0$ и плотность $\rho_0 = \rho_{01}$; слой воды толщиною h_2, в пределах которого $\sigma \neq 0$ и плотность $\rho_0 = \rho_0(z)$, граничные условия записываем в виде:

$$\text{при } z_1 = 1 \qquad \frac{d(\overline{w}_1)_n}{dz_1} = g\lambda^2 H (\overline{w}_1)_n - C\lambda^2 H;$$

$$\text{при } z_1 = h_1 \qquad \begin{cases} (\overline{w}_1)_n = (\overline{w}_2)_n, \\ \rho_{01} \dfrac{d(\overline{w}_1)_n}{dz_1} = \rho_{02} \dfrac{d(\overline{w}_2)_n}{dz}; \end{cases} \tag{25}$$

$$\text{при } z_1 = 0 \qquad (\overline{w}_2)_n = 0.$$

Решение получится в функциях:

$$\varphi_1(z_1) = z_1^{1/2} J_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2k}{m+2} z_1^{\frac{m+2}{2}}\right); \quad \varphi_2(z_1) = z_1^{1/2} J_{\frac{-1}{m+2}}\left(\frac{2k}{m+2} z_1^{\frac{m+2}{2}}\right). \tag{26}$$

После применения «интеграла обращения» операционного выражения приходим к следующим формулам для $(w_1)_n$ и $(w_2)_n$:

$$(w_1)_n \cong -\frac{f_n}{g} \frac{L}{\alpha_n} \frac{\omega \cos \omega t}{\rho_{02} - \rho_{01}} \rho_{01} \left[1 + \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \frac{k_n (z_1 - h_1)}{\varphi_1(k_n;\ h_1)} \dot{\varphi}_2(k_n;\ h_1)\right]; \tag{27}$$

$$(w_2)_n \cong -\frac{f_n}{g} \frac{L}{\alpha_n} \frac{\omega \cos \omega t}{\rho_{02} - \rho_{01}} \rho_{01} \frac{\varphi_1(k_n;\ z_1)}{\varphi_1(k_n;\ h_1)}. \tag{28}$$

В этих формулах индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к слою однородной воды и слою воды переменной плотности, соответственно.

Точка над фундаментальной функцией φ_2 означает операцию взятия производной по переменному z_1. Знак приближенного равенства поставлен вследствие отбрасывания слагаемого, характеризующего свободные колебания, которые неизбежно должны затухнуть ввиду наличия сил трения. В формулах имеется параметр

$$k_n^2 = \frac{\alpha_n^2}{L^2} \frac{gH\sigma}{\omega^2 - \Omega^2}. \tag{29}$$

Появление в знаменателях коэффициентов формул (27) и (28) разности плотностей у поверхности раздела ρ_{01} и ρ_{02} может иметь место, если параметр k_n является корнем трансцендентного уравнения:

$$\varphi_1(k_n;\ h_1) + \left(1 - h_1 - \frac{\sigma}{k_n^2 h_1}\right) \dot{\varphi}_1(k_n;\ h_1) = 0. \tag{30}$$

Формулы (27) и (28) показывают возрастание амплитуды вертикальных колебаний под действием массовой силы f в толще воды возрастающей плотности. На свободной поверхности жидкости колебания определяются только величиною $\frac{f_n}{g} \frac{L}{\alpha_n} \omega \cos \omega t$; у поверхности раздела колебания многократно увеличиваются по амплитуде ввиду малости разности плотностей $\rho_{02} - \rho_{01}$; максимум колебаний имеет место на горизонте, где $\varphi_1(z_1) = 1$.

Кроме факта возрастания амплитуды вертикальных колебаний в толще жидкости переменной плотности следует указать на факт возникновения горизонтальной циркуляции противоположного направления в слое воды от свободной поверхности и до горизонта, где имеет место максимум вертикальных колебаний, и от этого горизонта до дна бассейна.

Именно эти горизонтальные движения компенсируют те значительные вертикальные перемещения массы вод, которые наблюдаются на промежуточных глубинах. Это заключение следует из выражений (13) и (14), представляющих зависимость горизонтальных компонент скорости от градиента вертикальной скорости по глубине.

Формулы для вертикальной скорости становятся особенно простыми, если показатель степени возрастания плотности воды с глубиной $m = 1$. В этом случае функции Бесселя дробного индекса переходят в тригонометрические функции синус и косинус.

В заключение укажем, что если массовой силе f придать физический смысл горизонтальной компоненты приливной силы Луны, то при горизонтальных размерах бассейна порядка сотен километров, вертикальном размере порядка тысячи метров амплитуда колебаний на свободной поверхности оказывается порядка единиц сантиметров, на поверхности разрыва плотности порядка единиц метров, а на глубине порядка половины общей толщи воды амплитуда внутренних волн оказывается порядка десятков метров. Горизонтальные скорости в приповерхностном слое воды (верхней половине) оказываются порядка 10 см/сек.

Морской гидрофизический
институт
Академии наук СССР

Поступило
9 II 1953