Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 2

ФИЗИКА

Б. Т. ГЕЙЛИКМАН

О ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 2 III 1953)

Наличие нуклонного вакуума, как известно, приводит к дополнительному взаимодействию тяжелых частиц между собой и мезонов между собой. В настоящей работе качественно оценивается это взаимодействие, вызванное вакуумом, для случая сильной связи [1-3]. В теории сильной связи возможна лишь качественная оценка влияния вакуума, так как теория имеет существенно нерелятивистский характер («радиус» нуклона $a \neq 0$). Такая оценка имеет смысл в том случае, если для всех рассматриваемых эффектов главную роль и при положительных, и при отрицательных энергиях будут играть импульсы тяжелых частиц $|p| < mc$.

Рассмотрим псевдоскалярное мезонное поле, взаимодействующее с N тяжелыми частицами. Гимильтониан имеет вид:

$$H = \sum_i^N [c(\vec{\alpha}_i, \mathbf{p}_i) + \beta_i mc^2] + {}^1/_2 \int \sum_\alpha^3 \Big[\Pi_\alpha^2 + c^2 (\nabla\Phi_\alpha)^2 + c^2\varkappa^2\Phi_\alpha^2 -$$

$$- 2c\sqrt{4\pi} \sum_i^N (G_{\alpha i}\Phi_\alpha + F_{\alpha i}\Pi_\alpha) + 4\pi c^2 \sum_{i,j}^N F_{\alpha i} F_{\alpha j} \Big] d\mathbf{r}; \tag{1}$$

$$G_{\alpha j} = - i\beta_j \gamma_{5j} \tau_{\alpha j} g_{ps} U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) + (g_{pv}/\varkappa) \tau_{\alpha j} (\vec{\sigma}_j, \nabla U_j);$$
$$F_{\alpha j} = (g_{pv}/\varkappa c) \gamma_{5j} \tau_{\alpha j} U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j).$$

Чтобы отделить классическую часть Φ_α и Π_α, допустим сначала, что Φ_α и Π_α в H заменены классическими величинами φ_α^0 и π_α^0 (при этом $H = H^0$). Потребуем, чтобы поле φ_α^0 и π_α^0 минимизировало среднее значение H^0 по переменным обычного и изотопического спина частиц $s_1 \ldots s_N$ (это условие является естественным обобщением условия для φ_α^0 и π_α^0 в случае покоящихся тяжелых частиц [1-3]):

$$\delta \langle H \rangle^s = \delta \{(\psi^{0*}(\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_N, s_1 \ldots s_N, \quad H^0 \psi^0 (\mathbf{r}_1 \ldots s_N)) (\psi^{0*}, \psi^0)^{-1}\} = 0.$$

Тогда получаем уравнения для φ_α^0 и π_α^0:

$$(\varkappa^2 - \Delta)\varphi_\alpha^0 = \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \sum_i \langle G_{\alpha i} \rangle^s; \quad \pi_\alpha^0 = c\sqrt{4\pi} \sum_i \langle F_{\alpha i} \rangle^s; \tag{2}$$

здесь

$$\langle G_{\alpha i} \rangle^s = (\psi^{0*}(\mathbf{r}_1 \ldots s_N), \ G_{\alpha i} \psi^0 (\mathbf{r}_1 \ldots s_N)) \cdot (\psi^{0*}, \psi^0)^{-1},$$

откуда

$$\varphi_\alpha^0 = \frac{1}{c\sqrt{4\pi}} \sum_i \int \langle G_{\alpha i}(\mathbf{r}') \rangle^s \frac{e^{-\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

Подставим выражения для φ_α^0 и π_α^0 в уравнение Шредингера $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$:

$$\Big\{\sum_i [c(\vec{\alpha}_i, \mathbf{p}_i) + \beta_i mc^2] + {}^1/_2 \sum_{\alpha, i, j} \int [\langle G_{\alpha i}(\mathbf{r}')\rangle^s -$$
$$- 2G_{\alpha i}(\mathbf{r}')] \langle G_{\alpha j}(\mathbf{r})\rangle^s e^{-\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' +$$
$$+ 2\pi c^2 \sum_{\alpha, i, j} \int [(\langle F_{\alpha i}\rangle^s - 2F_{\alpha i})\cdot \langle F_{\alpha j}\rangle^s + F_{\alpha i} F_{\alpha j}]\, d\mathbf{r}\Big\} \psi^0 = E^0\psi^0. \tag{3}$$

Если найдены собственные функции ψ_n^0 и собственные значения E_n^0 этого нелинейного уравнения (E_n^0 в этом случае имеют непрерывный спектр в отличие от E_λ^0 в ([1-3])), можно из H^0 образовывать гамильтонианы H_n^0, подставляя в H^0 $\langle F_{\alpha i}\rangle_{nn}^s$ и $\langle G_{\alpha i}\rangle_{nn}^s$ ($\langle F_{\alpha i}\rangle_{nn}^s = \langle F_{\alpha i}\rangle^s$ с $\psi^0 = \psi_n^0$) вместо $\langle F_{\alpha i}\rangle^s$ и $\langle G_{\alpha i}\rangle^s$ (см. ([1])). Собственные функции ψ_{nl}^0 уравнения $H_n^0 \psi_{nl}^0 = E_{nl}^0 \psi_{nl}^0$ образуют полную ортогональную систему (в дальнейшем спектр E_n^0 предполагается квазидискретным, что соответствует конечному объему V).

Подставим в полный гамильтониан H (1) $\Phi = \varphi^0 + \varphi$; $\Pi = \pi^0 + \pi$. Тогда:

$$H = H_n^0 + H'; \quad H' = H^{(1)} + H^{(2)};$$
$$H^{(1)} = c\sqrt{4\pi}\int \sum_{\alpha, i} [(\langle G_{\alpha i}\rangle_{nn}^s - G_{\alpha i})\varphi_\alpha + (\langle F_{\alpha i}\rangle_{nn}^s - F_{\alpha i})\pi_\alpha]\, d\mathbf{r}; \tag{4}$$
$$H^{(2)} = {}^1/_2 \int \sum_\alpha [\pi_\alpha^2 + c^2\varphi_\alpha(\varkappa^2 - \Delta)\varphi_\alpha]\, d\mathbf{r}; \quad H\psi_n = E_n\psi_n.$$

Будем искать ψ-функцию системы в виде $\psi_n = \sum_l [\chi_n^0(q_k)\delta_{nl} + \chi'_{nl}(q_k)]\psi_{nl}^0(\mathbf{r}_1 \ldots s_N)$. Предполагая, что $\varphi \ll \varphi^0$; $\chi'_{nl} \ll \chi_n^0$, и пользуясь теорией возмущений в форме, изложенной в ([1]), получим уравнение для χ_n^0 с точностью до членов 3-го порядка:

$$(H_{n2} + H'_{n3} + H''_{n3})\chi_n^0 = E'_n \chi_n^0; \tag{5}$$

здесь

$$E'_n = E_n - E_n^0; \; H_{n2} = H'_{nn} + \sum_{l \neq n} H_{nl}^{(1)} H_{ln}^{(1)} (E_n^0 - E_{nl}^0)^{-1};$$
$$H'_{n3} = \sum_{l \neq n} H_{nl}^{(1)} H_{ln}^{(1)} [(E_n^0 - E_{nl}^0 + E'_n)^{-1} - (E_n^0 - E_{nl}^0)^{-1}];$$
$$H''_{n3} = \sum_{l \neq n,\, m \neq n} H_{nl}^{(1)} H_{lm}^{(1)} H_{mn}^{(1)} (E_n^0 - E_{nl})^{-1} (E_n^0 - E_{nm}^0)^{-1};$$
$$H'_{lm} = \int (\psi_{nl}^{0*}, H'\psi_{nm}^0)\, \Pi\, d\mathbf{r}_i$$
$$H'_{nn} = H_{nn}^{(2)},$$

так как

$$H_{nn}^{(1)} = 0,$$

и выражение для χ'_{nl} $(n \neq l)$:

$$\chi'_{nl} = \Big\{H'_{ln}(E_n^0 - E_{nl}^0 + E'_n)^{-1} + \sum_{m \neq n} H_{lm}^{(1)} H_{mn}^{(1)} (E_n^0 - E_{nm}^0)^{-1} (E_n^0 - E_{nl}^0)^{-1}\Big\}\chi_n^0. \tag{6}$$

Если разложить φ и π по собственным функциям φ_k^ρ уравнений поля $\left(\dot{\pi}_\alpha = \frac{i}{\hbar}[H_{n2}\pi_\alpha];\ \dot{\varphi}_\alpha = \frac{i}{\hbar}[H_{n2}, \varphi_\alpha]\right)$, соответствующих гамильтониану H_{n2}, $\varphi = \sum_{k, \rho} q_{k\rho}\varphi_k^\rho$, $\pi = \sum_{k, \rho} p_{k\rho}\varphi_k^\rho$, то H_{n2} распадается на сумму гамильтонианов осцилляторов, и энергия (без учета H_{n3}) будет равна: $E'_n \simeq E_{n2} = \sum_{k\rho}\left(n_{k\rho}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k$ $(\omega_k = c\sqrt{\varkappa^2+k^2}$ при $\omega \geqslant c\varkappa)$ (см. ([1])).

Аналогичная теория может быть развита для нерелятивистского уравнения $H_0\psi = E_0\psi$ (8) в ([3]). В этом случае движение тяжелых частиц учитывается непосредственно, без применения адиабатической теории возмущений, хотя практически расчеты при этом значительно сложнее, так как уравнение (3) дифференциальное, а не алгебраическое. Для φ^0_α, π^0_α получаются точно такие же выражения, как в ([3]): (2), (5), (6), но в этих выражениях всюду вместо $|O_{\alpha i}|_{\lambda\lambda}$ следует подставить $\langle O_{\alpha i}\rangle^s_{nn}$ и т. д., как в (2).

Нетрудно видеть, что условие применимости теории $H' < H^0$ и $\varphi \ll \varphi^0$ в случае достаточно сильной связи выполняется. Действительно, $\varphi^0 \approx (g / c\varkappa a^2)$ (см. ([2])), а в отсутствие мезонов $\varphi^2_{\text{ср}} \approx \frac{\omega^3_{\max}}{c^3}(q^2_k)_{\text{ср}} \approx \frac{\hbar}{ca^2}$ (в $H^{(1)}$, как видно из (4), входят $q_{k\rho}$ с частотами $\omega \lessapprox \omega_{\max} \approx c / a$, а $H^{(2)}$ не имеет недиагональных элементов).

Таким образом,

$$\varphi \ll \varphi^0, \quad H' \ll H^0, \quad \text{если } (g^2 / \hbar c) \gg \varkappa^2 a^2. \tag{7}$$

В присутствии мезонов должно быть еще выполнено условие $\Sigma n_{k\rho}\hbar\omega_k \ll Nmc^2\,(E'_n \ll E^0_n)$.

Чтобы перейти к вакууму, следует принять, что все отрицательные уровни заполнены, т. е. $(N)_{E<0} \to \infty$. Если помимо этого имеются тяжелые частицы с положительной энергией, то, очевидно, вследствие поляризации каждой частицей вакуума, возникнет дополнительное взаимодействие между частицами с $E > 0$ — взаимодействие поляризованных облаков из частиц с $E < 0$. При расстоянии между двумя частицами $r_{12} > \varkappa^{-1}$ это добавочное взаимодействие приводит, повидимому, лишь к перенормировке мезонного заряда g. При $r_{12} < \varkappa^{-1}$ эффект может оказаться более сложным. Нелинейная добавка к лагранжиану, связанная с поляризацией вакуума (для нейтрального поля с псевдоскалярной связью), в классическом приближении ($[\Pi, \Phi] = 0$) была вычислена в ([4]). Так как поле φ^0, определяющее взаимодействие тяжелых частиц, является классическим ([1-3]), то для учета вакуума в уравнении для φ^0_α ((4) в ([3])) достаточно добавить нелинейный член ((8)), полученный в ([4]):

$$\Delta\varphi^0 - \varkappa^2\varphi^0 - \frac{2ig^2\varphi^0}{\pi(\hbar c)^{3/2}}\int\limits_{is_0}^{\infty}\frac{ds}{s^2}\exp\left[\frac{-ic^2}{(\hbar c)^{3/2}}\left(m+4\pi g^2(\varphi^0)^2\right)s\right] = -\frac{\sqrt{4\pi}}{c}\sum_i^n \langle G_i\rangle.$$

Рассмотрим теперь нелинейность мезонного поля φ, связанную с наличием вакуума. Эта нелинейность описывается ангармоническими членами в (5), т. е. кубическими H''_{n3}, не выписанными членами 4-го порядка и т. д. Поскольку условие $H' \ll H^0$, $\varphi \ll \varphi^0$, как видно из (7), выполняется и при $N \to \infty$, теория возмущений сходится; следовательно, частоты поля φ равны $\omega = c\sqrt{\varkappa^2 + k^2}$ и ангармонические слагаемые должны быть значительно меньше квадратичных (малая нелинейность), если только суммы по l, m в выражении для H''_{n3} сходятся. H''_{n3} представляет сумму по $k\rho$, $k'\rho'$, $k''\rho''$ слагаемых вида

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ i,j,s}}\sum_{l,m}\frac{\int|\widetilde{G}_{\alpha i}(\mathbf{r})|_{nl}\,\varphi^\rho_k(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\int|G_{\beta j}(\mathbf{r}')|_{lm}\,\varphi^{\rho'}_{k'}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'\int|G_{\gamma s}(\mathbf{r}'')|_{mn}\,\varphi^{\rho''}_{k''}(\mathbf{r}'')\,d\mathbf{r}''}{(E^0_n - E^0_{nl})(E^0_n - E^0_{nm})}\times$$

$$\times\, q_{k\rho}\,q_{k'\rho'}\,q_{k''\rho''} \tag{8}$$

и аналогичных слагаемых, содержащих $p_{k\rho} q_{k'\rho'} q_{k''\rho''}$ и т. д.; $\widetilde{G}_{\alpha l} = \langle G_{\alpha l} \rangle^{s}_{nn} - G_{\alpha l}$. $\varphi^{\rho}_{k} = V^{-1/2} \cdot e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}$, так как мезоны в вакууме не должны рассеиваться. Матричные элементы $\int | G_{\alpha l}(\mathbf{r}) |_{nl} \varphi^{\rho}_{k}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ и т. д. соответствуют переходам одной (или более) тяжелой частицы из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией. Очевидно, $E^{0}_{nl} - E^{0}_{n} \geqslant 2\ mc^2$. К сожалению, сходимость (8) трудно исследовать, так как неизвестны ψ-функции взаимодействующих частиц вакуума. Если (8) расходятся, надо ввести обрезание, например, в форме, предложенной в ([4,5]), для исключения переходов частиц с импульсами $|p_i| > mc$ (см. выше).

Таким образом, после выделения поля φ^{0}_{α} («псевдомезонов») нелинейность поля «истинных мезонов» φ_{α} в теории сильной связи, не содержащей расходимостей, оказывается малой. Без выделения φ^{0}_{α} нелинейность полного поля Φ_{α} в случае сильной связи, как известно, велика и при квантовании поля возникают значительные трудности ([6]). В ([6]) ошибочно предполагается, что добавка к лагранжиану, связанная с наличием вакуума, для полного поля Φ_{α} имеет такой же вид, как и для классического поля φ^{0}_{α} (см. ([4])), и в выражении для энергии взаимодействия частиц с полем операторы τ_{α} и σ_{k} заменяются классическими величинами.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
2 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Гейликман, ДАН, 90, № 3 (1953). [2] Б. Гейликман, ДАН, 90, № 5 (1953). [3] Б. Гейликман, ДАН, 91, № 1 (1953). [4] B. Malenka, Phys. Rev., 85, 686 (1952). [5] J. Rayski, Acta Physica Polonica, 11, 25 (1951). [6] D. Jennie, Phys. Rev., 88, 527 (1952).