Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. ЖГЕНТИ

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 V 1953)

Рассмотрим оболочку, уравнение срединной поверхности которой имеет вид:

$$z = f(x, y),$$

где x, y, z — декартовы координаты точки.

Пусть G — область на срединной поверхности оболочки, а G_0 — ортогональная проекция на плоскости $x+iy$; контур области G_0 обозначим через L_0.

Пусть $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в $G_0 + L_0$.

Дифференциальные уравнения равновесия пологих оболочек имеют вид [1]:

$$-\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{11}+\sigma\varepsilon_{22}) + (1-\sigma)\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y}\right\} = q_1,$$

$$-\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left\{(1-\sigma)\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_{22}+\sigma\varepsilon_{11})\right\} = q_2,$$

$$-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varkappa_{11}+\sigma\varkappa_{22}) + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 \varkappa_{12}}{\partial x\,\partial y} + \right. \tag{1}$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varkappa_{22}+\sigma\varkappa_{11})\right\} - \frac{Eh}{1-\sigma^2}\left\{l(\varepsilon_{11}+\sigma\varepsilon_{22}) + 2(1-\sigma)m\varepsilon_{12} + n(\varepsilon_{22}+\sigma\varepsilon_{11})\right\} = q_3,$$

где h — толщина оболочки; E — модуль Юнга; σ — коэффициент Пуассона; ε_{ij} и $\varkappa_{ij}$ — компоненты деформации, $\mathrm{q}(q_1, q_2, q_3)$ — внешняя нагрузка; $l = \frac{1}{H}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $m = \frac{1}{H}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $n = \frac{1}{H}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $H = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Компоненты деформаций связаны с вектором $\mathrm{U}(u, v, w)$ смещения точек срединной поверхности соотношениями [1]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - lw, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - mw, \quad \varepsilon_{22}\frac{\partial v}{\partial y} - nw,$$

$$\varkappa_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \quad \varkappa_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Уравнения равновесия (1) оболочки мы запишем символически в виде

$$\mathrm{AU} = \mathrm{q}.$$

Поставим следующую задачу:

Найти вектор смещения $\mathbf{U}(u, v, w)$ при условиях:

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ на } L_0. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение вещественное гильбертово пространство, элементы которого суть векторы, определяемые в точках поверхности G. Скалярное произведение зададим формулой

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \iint\limits_{G_0} (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)\, dx\, dy,$$

$$\|\mathbf{U}\|^2 = \iint\limits_{G_0} (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy.$$

На множестве векторов смещений, удовлетворяющих краевым условиям (2), оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет тождеству

$$(\mathbf{AU}, \mathbf{U}) = 2\{Э_1[\mathbf{U}] + Э_2[\mathbf{U}]\}, \tag{3}$$

где

$$Э_1[\mathbf{U}] = \frac{Eh}{2(1-\sigma^2)} \iint\limits_{G_0} [\varepsilon_{11}^2 + 2\sigma\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + 2(1-\sigma)\varepsilon_{12}^2]\, dx\, dy,$$

$$Э_2[\mathbf{U}] = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \iint\limits_{G_0} [\varkappa_{11}^2 + 2\sigma\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{22}^2 + 2(1-\sigma)\varkappa_{12}^2]\, dx\, dy.$$

Введем обозначения

$$H[\varphi] = \iint\limits_{G_0} \varphi^2 dx\, dy,$$

$$D[\varphi] = \iint\limits_{G_0} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

$$K[\varphi] = \iint\limits_{G_0} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Применяя неравенства

$$a^2 + 2\sigma ab + b^2 \geqslant (1-\sigma)(a^2 + b^2),$$

$$a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}(a-b)^2, \quad a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$

получим

$$Э_1[\mathbf{U}] \geqslant \frac{Eh}{2(1+\sigma)} \iint\limits_{G_0} \left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] - \right.$$

$$\left. - (l^2 + n^2 + 2m^2)\left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) w^2\right\} dx\, dy.$$

Отсюда

$$Э_1[\mathbf{U}] \geqslant \gamma_1^2\{D[u] + D[v]\} - \gamma_2^2(\mathbf{AU}, \mathbf{U}), \tag{4}$$

так как

$$(\mathbf{AU}, \mathbf{U}) \geqslant 2Э_2[\mathbf{U}],$$

$$Э_2[\mathbf{U}] \geqslant \gamma_3^2 K[w] \geqslant \gamma_4^2 H[w], \tag{5}$$

$$\iint\limits_{G_0} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy = 0.$$

Из (3), в силу (4) и (5), получим

$$(\mathbf{AU}, \mathbf{U}) \geqslant \gamma_5^2 \{D[u] + D[v] + K[w]\}.$$

Из последнего следует, что

$$(\mathbf{AU}, \mathbf{U}) \geqslant \gamma^2 \| \mathbf{U} \|^2,$$

т. е. оператор **A** положительно-определенный. Отсюда, как обычно, вытекает, что поставленная выше задача имеет решение.

Если $\{\mathbf{U}_k(u_k, v_k, w_k)\}$ — минимизирующая последовательность, то $\{u_k\}, \{v_k\}, \{w_k\}, \left\{\frac{\partial u_k}{\partial x}\right\}, \left\{\frac{\partial u_k}{\partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial v_k}{\partial x}\right\}, \left\{\frac{\partial v_k}{\partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial w_k}{\partial x}\right\}, \left\{\frac{\partial w_k}{\partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2}\right\}$ сходятся в среднем. В силу теоремы вложения пространств С. Л. Соболева ([2]) имеем, что $\{w_k\}$ сходится равномерно в $G_0 + L_0$.

Горийский государственный педагогический институт им. Н. Бараташвили

Поступило
20 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Прикладн. матем. и мех., 16, в. 4, 417 (1952). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.