Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. В. ФИНКЕЛЬШТЕЙН

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ КРАЙНИХ ЧЛЕНОВ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 V 1953)

Рассмотрим n двумерных случайных величин $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ $\ldots, x_n, y_n)$, каждая из которых подчинена одному и тому же закону распределения $F(x, y)$, и пусть

$$\begin{gathered}\xi_1^{(n)} \leqslant \xi_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_n^{(n)},\\ \eta_1^{(n)} \leqslant \eta_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \eta_n^{(n)}\end{gathered} \tag{1}$$

вариационные ряды, образованные, соответственно, из первых и вторых компонент этих случайных величин.

Исследуем распределение случайной величины $(\xi_1^{(n)}, \eta_1^{(n)})$ — минимального члена «связанного» вариационного ряда (1).

Условимся в следующих обозначениях:

$$\begin{gathered}\Phi_{km}^{(n)}(a_n x + b_n,\ c_n y + d_n) = P\{\xi_k^{(n)} < a_n x + b_n,\ \eta_m^{(n)} < c_n y + d_n\},\\ u_n(x) = nF(a_n x + b_n, \infty),\\ v_n(y) = nF(\infty, c_n y + d_n),\\ w_n(x, y) = nF(a_n x + b_n, c_n y + d_n)\end{gathered}$$

$(a_n > 0,\ b_n,\ c_n > 0$ и d_n — надлежащим образом выбранные константы).

Сходимость к предельному распределению $\Phi(x, y)$ понимается здесь как сходимость в каждой точке непрерывности $\Phi(x, y)$, причем будем считать $\Phi(x, y)$ собственным законом распределения.

Теорема 1. *Для того чтобы*

$$\Phi_{11}^{(n)}(a_n x + b_n,\ c_n y + d_n) \to \Phi(x, y) \quad (n \to \infty), \tag{2}$$

необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих соотношений:

$$\begin{aligned} u_n(x) &\to u(x) \quad (n \to \infty);\\ v_n(y) &\to v(y) \quad (n \to \infty);\\ w_n(x, y) &\to w(x, y) \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

где функции $u(x)$, $v(y)$ *и* $w(x, y)$, *удовлетворяющие условиям* $u(\infty) = \infty$, $v(\infty) = \infty$, $w(x, \infty) \not\equiv \infty$, $w(\infty, y) \not\equiv \infty$, *однозначно определяются по* $\Phi(x, y)$ *уравнением*:

$$\Phi(x, y) = 1 - e^{-u(x)} - e^{-v(y)} + e^{-u(x) - v(y) + w(x, y)}. \tag{3}$$

По поводу этой теоремы отметим два обстоятельства:

1. Если $\Phi(x, y)$ — предельная функция распределения для последовательности $\{\Phi_{11}^{(n)}(a_n x + b_n,\ c_n y + d_n)\}$, то $u(x)$, $v(y)$ и $w(x, y)$ — функции неубывающие и $w(x, y) \leqslant u(x)$, $w(x, y) \leqslant v(y)$.

2. Если обозначить через $r_n(x, y)$ коэффициент корреляции между событиями, заключающимися в выполнении неравенств $\xi < a_n x + b_n$, $\eta < c_n y + d_n$, то в случае, когда $\Phi(x, y)$ — предельный закон распределения минимального члена вариационного ряда, имеет место соотношение:

$$R(x, y) = \lim_{n\to\infty} r_n(x, y) = \frac{w(x, y)}{\sqrt{u(x)\,v(y)}}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для того чтобы при надлежащем выборе* $a_n > 0$, b_n, $c_n > 0$ *и* d_n *выполнялось соотношение* (2), *необходимо, чтобы при любом целом* $\nu > 0$ *функции* $u(x)$, $v(y)$ *и* $w(x, y)$, *определенные из* (3), *одновременно удовлетворяли следующим функциональным уравнениям:*

$$\nu u(\alpha_\nu x + \beta_\nu) = u(x); \tag{5}$$

$$\nu v(\gamma_\nu y + \delta_\nu) = v(y); \tag{5^1}$$

$$\nu w(\alpha_\nu x + \beta_\nu,\ \gamma_\nu y + \delta_\nu) = w(x, y), \tag{5^2}$$

$\alpha_\nu > 0$, $\gamma_\nu > 0$, β_ν *и* δ_ν — *некоторые константы.*

Эта теорема основана на предложении, являющемся обобщением известной теоремы Хинчина ([2], стр. 8) об однозначной определенности предельного типа закона распределения.

Функции $u(x)$ и $v(y)$, встречающиеся в (5) и (5^1), определяют предельные распределения крайних членов вариационного ряда одномерной случайной величины, подчиненной, соответственно, законам распределения $F(x, \infty)$ и $F(\infty, y)$ (см. [1], стр. 50, теорема 3). На основании результатов Н. В. Смирнова ([1], стр. 52, теорема 5) совокупность классов предельных распределений, если при классификации исходить из вида функций $u(x)$ и $v(y)$, исчерпывается следующими 6 классами ($\alpha > 0$, $\beta > 0$):

		1 класс	2 класс	3 класс	4 класс	5 класс	6 класс
$u(x)$	$x < 0$	0	0	0	$\lvert x\rvert^{-\alpha}$	$\lvert x\rvert^{-\alpha}$	e^x
	$x > 0$	x^α	x^α	x^α	∞	∞	
$v(y)$	$y < 0$	0	$\lvert y\rvert^{-\beta}$	e^y	$\lvert y\rvert^{-\beta}$	e^y	e^y
	$y > 0$	y^β	∞		∞		

(6)

Исследуя функциональные уравнения (5^2) и исключая из рассмотрения тривиальный случай $w(x, y) \equiv 0$, соответствующий предельной независимости распределений $\xi_1^{(n)}$ и $\eta_1^{(n)}$, получим следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(y)$ *принадлежат к какому-либо из классов* (6), *а* $w(x, y)$ — *неотрицательная неубывающая функция* x *и* y. *Для того чтобы функция* $\Phi(x, y)$, *определенная соотношением* (3), *являлась предельным законом распределения для последовательности* $(\xi_1^{(n)}, \eta_1^{(n)})$ *минимальных членов некоторого вариационного ряда, необходимо и достаточно, чтобы* $R(x, y)$, *определенная из* (4), *в каждой точке непрерывности* $\Phi(x, y)$, *в которой*

$$0 < u(x) < \infty, \quad 0 < v(y) < \infty,$$

удовлетворяла следующим условиям:

1) $0 < R(x, y) \leqslant 1$;

2) *на кривых* $v(y) = cu(x)$ *при любом* $c > 0$ $R(x, y)$ *имеет постоянные значения;*

3) *для любых* $x_1 > x_2$ *при всех* y *и для любых* $y_1 > y_2$ *при всех* x, *соответственно*:

$$\frac{R(x_1, y)}{R(x_2, y)} \geqslant \sqrt{\frac{u(x_2)}{u(x_1)}},$$

$$\frac{R(x, y_1)}{R(x, y_2)} \geqslant \sqrt{\frac{v(y_2)}{v(y_1)}}.$$

Пользуясь этой теоремой, можно свойствам функции $R(x, y)$ придать более обозримую форму.

Обозначим:

$$\frac{u(x)}{v(y)} = z, \quad R(x, y) = \varphi(z).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $\varphi(z) \leqslant \min\left\{\sqrt{z}, \sqrt{\frac{1}{z}}\right\}$;

б) $\varphi(z) \to 0$ *при* $z \to 0$ *и при* $z \to \infty$;

в) $\varphi(z)$ *не монотонная функция от* z, *а следовательно*, $R(x, y)$ *не монотонная функция от* x *и* y;

г) $\varphi(z) \neq 0$, *если* $0 < z < \infty$;

д) *если* $\Phi(x, y)$ — *функция* 1-*го*, 2-*го или* 4-*го класса, то при любом* $c > 1$

$$\frac{\varphi(z)}{\sqrt{c}} \leqslant \varphi(cz) \leqslant \sqrt{c}\, \varphi(z);$$

е) *если* $\Phi(x, y)$ — *функция* 3-*го*, 5-*го или* 6-*го класса, то при любом* $a > 0$

$$\varphi(z)\, e^{a/2} \geqslant \varphi(z-a) \geqslant \varphi(z)\, e^{-a/2}.$$

В заключение заметим, что при любых постоянных k и m условия сходимости последовательности $\Phi_{km}^{(n)}(a_n x + b_n, c_n y + d_n)$ к предельному распределению те же, что и для последовательности $\Phi_{11}^{(n)}(a_n x + b_n, c_n y + d_n)$. Благодаря этому совокупность классов предельных законов распределения при любых постоянных k и m (если при классификации исходить из вида функции $u(x)$ и $v(y)$) полностью совпадает с той же совокупностью предельных законов распределения для минимального члена, и, более того, константы $a_n > 0$, b_n, $c_n > 0$ и d_n можно выбирать те же для любых постоянных k и m (сами предельные законы, разумеется, различны при разных k и m).

Поступило
20 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Смирнов, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **25** (1949). [2] А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, 1938.