Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 2

МАТЕМАТИКА

Е. И. КИМ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 V 1953)

§ 1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\eta, \tau) \sum_{i=1}^{n} A_i(\eta, \tau) \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4a_i^2(t-\tau)}\right] d\eta\, d\tau = f(y, t), \qquad (1)$$

где a_i — постоянные числа; $A_i(\eta, \tau)$ — любые непрерывные, ограниченные и интегрируемые функции; $f(y, t)$ — заданная функция, имеющая непрерывную и ограниченную производную второго порядка по первому аргументу и ограниченную непрерывную производную первого порядка по второму аргументу; $u(y, t)$ — искомая функция.

В настоящей работе мы покажем, что если

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_i(y, t) \neq 0, \qquad (2)$$

то уравнение (1) можно свести к интегральным уравнениям второго рода и решить методом последовательного приближения.

§ 2. Предварительно рассмотрим интеграл

$$J(h) = \int_0^t \frac{h\, d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} G(h, y-\eta, t-\tau;\ a_1, a)\, \Phi_0(\eta, \tau)\, d\eta, \qquad (3)$$

где

$$G(h, y-\eta, t-\tau; a_1, a) = \\ = \frac{1}{4\pi a_1^2 (t-\tau)} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4a_1^2(t-\tau)} - \frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \quad (h > 0).$$

Если функция Φ_0 непрерывна и удовлетворяет необходимым условиям для существования интеграла (3), то непосредственным вычислением можно показать, что

$$\lim_{n \to 0} J(h) = \frac{a}{a_1} \Phi_0(y, t). \qquad (4)$$

Рассмотрим еще интеграл

$$I = \int_0^t \frac{d\tau_1}{\tau_1} \int_{-\infty}^{+\infty} G(h, y-\eta, \tau_1, a_1, a_1)\, G(0, y-\eta, \tau_1 - \tau; a, a)\, d\eta_1.$$

После вычисления внутреннего интеграла, произведя замену переменной интегрирования

$$\sqrt{\frac{t}{\tau_1}-1}=\frac{2a_1\sqrt{t}}{h}\,z,$$

получаем

$$I=\frac{1}{2a^2\pi^{3/2}ht}\exp\left[-\frac{h^2}{4a_1^2t}-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}\right]\Phi(h,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a), \tag{5}$$

где

$$\Phi(h,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a)=$$
$$=\frac{a}{a_1}\int_0^\infty\sqrt{\frac{h^2+4a_1^2tz^2}{h^2+4a^2tz^2}}\exp\left[-z^2-\frac{(y-\eta)^2h^2(a^2-a_1^2)}{4a_1^2a^2(h^2+4a^2tz^2)}\right]dz. \tag{6}$$

Очевидно, что функция Φ обладает свойством

$$\Phi(h,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a_1)={}^1/_2\sqrt{\pi},\quad \Phi(0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a)={}^1/_2\sqrt{\pi}. \tag{7}$$

Для дальнейшего исследования найдем значение функции $\Phi_h'(0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a)$ и дадим ее оценку.

После дифференцирования функции Φ по h, производя замену переменных

$$z=\frac{h}{\sqrt{t}}\frac{1}{z_1}$$

и переходя к пределу при $h\to 0$, получим:

$$\Phi_h'(0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a)=\frac{a^2-a_1^2}{4a_1^3a}\int_0^\infty\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2(a^2-a_1^2)z^2}{4a_1^2a^2t(z^2+4a^2)}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\frac{z^2+4a_1^2}{z^2+4a^2}}\left[\frac{1}{(z^2+4a_1^2)(z^2+4a^2)}-\frac{(y-\eta)^2}{2a^2t(z^2+4a^2)^2}\right]\sqrt{t}\,dz. \tag{8}$$

Отсюда

$$|\Phi_h'(0,\ y-\eta,\ t;\ a_1,\ a)|\leqslant\left[A\sqrt{t}+B\frac{(y-\eta)^2}{\sqrt{t}}\right]\exp\left[-\gamma\frac{(y-\eta)^2}{t}\right], \tag{9}$$

где A, B — некоторые положительные постоянные, равные нулю при $a_1=a$, а

$$\gamma=\inf\left[\frac{(a^2-a_1^2)z^2}{4a_1^2a^2(z^2+4a^2)}\right]=\min\left[\frac{a^2-a_1^2}{4a_1^2-a^2};\ 0\right]. \tag{10}$$

§ 3. В равенстве (1) вместо t поставим t_1, а вместо y поставим y_1. После умножения равенства (1) на $\frac{1}{t-t_1}$ $G(h,\ y-y_1,\ t-t_1,\ a_1,\ a_1)$ интегрируем обе части по y_1 от $-\infty$ до $+\infty$ и по t_1 от 0 до t, а затем переставим интегрирование. Тогда, на основании формулы (5), имеем:

$$\int_0^t\frac{2d\tau}{\sqrt{\pi}\,h(t-\tau)}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\eta,\ \tau)\sum_{i=1}^nA_i(\eta,\ \tau)\exp\left[-\frac{h^2}{4a_1^2(t-\tau)}-\frac{(y-\eta)^2}{4a_i^2(t-\tau)}\right]\times$$
$$\times\Phi(h,y-\eta,t-\tau;a_1,a_i)\,d\eta=\int_0^t\frac{dt_1}{t-t_1}\int_{-\infty}^{+\infty}G(h,y-y_1,t-t_1;a_1,a_1)\,d\eta. \tag{11}$$

После умножения на h и дифференцирования по h перейдем к пределу при $h \to 0$. Тогда на основании формулы (4) имеем:

$$
\begin{aligned}
&-u(y,t)\frac{2\pi}{a_1}\sum_{i=1}^{n} a_i A_i(y,t) + \\
&+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\eta,\ \tau)\sum_{i=1}^{n} A_i(\eta,\ \tau)\ \times \\
&\times \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4a_i^2(t-\tau)}\right]\Phi'_h(0, y-\eta, t-\tau;\ a_1,\ a_1)\,d\eta = \\
&=\lim_{h\to 0}\int_0^t \frac{dt_1}{t-t_1}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1,t_1)\left[1-\frac{h^2}{2a_1^2(t-t_1)}\right]G(h,\ y-y_1,\ t-t_1,\ a_1,\ a_1)\,dy_1. \quad (12)
\end{aligned}
$$

На основании условия (2) последнее равенство можно записать следующим образом:

$$
u(y,t)=\lambda\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} K(y,\ t;\ \eta,\ \tau)\,u(\eta,\ \tau)\,d\eta + F(y,\ t), \qquad (13)
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\lambda=\frac{a_1}{\pi^{3n}},\quad K(y,\ t;\ \eta,\ \tau)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i A_i(y,t)}\sum_{i=1}^{n} A_i(\eta,\ \tau)\ \times \\
&\times \exp\left[-\frac{(y-\eta)^3}{4a_i^2(t-\tau)}\right]\Phi'_h(0,\ y-\eta,\ t-\tau;\ a_1,\ a_i),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F(y,\ t)=\frac{a_1}{2\pi\sum_{i=1}^{n} a_i A_i}\lim_{n\to o}\int_0^t \frac{dt_1}{t-t_1}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1,\ t_1)\ \times \\
&\times\left[\frac{h^2}{2a_i^2(t-i_1)}-1\right]G(h,\ y-y_1,\ t-t_1;\ a_1,\ a_1)\,dy_1.
\end{aligned}
$$

Легко можно показать, что если $f(y_1,\ t_1)$ удовлетворяет тем условиям, о которых сказано выше, то

$$
|F(y,t)|\leqslant\frac{M}{\sqrt{t}}, \qquad (14)
$$

где M — некоторое постоянное число.

Кроме того, на основании неравенства (9):

$$
|K(y,\ t;\ \eta,\tau)|\leqslant\left[A_0\sqrt{t-\tau}+B_0\frac{(y-\eta)^2}{\sqrt{t-\tau}}\right]e^{-\gamma_0\frac{(y-\eta)^2}{t-\tau}}, \qquad (15)
$$

где $\gamma_0=\frac{1}{4a_i^2}-\gamma>0$; A_0, B_0 — постоянные числа, равные нулю при $a_1=a_i$.

Решение уравнения (13) будем искать в виде

$$
u(y,\ t)=u_0(y,\ t)+\lambda u_1(y,\ t)+\ldots+\lambda^n u_n(y,\ t)+\ldots \qquad (16)
$$

Тогда

$$
u_0(y,\ t)=F(y,\ t); \qquad (17)
$$

$$
u_n(y,\ t)=\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} K(y,\ t;\ \eta,\ \tau)\,u_{n-1}(\eta,\ \tau)\,d\eta\,d\tau. \qquad (18)
$$

На основании неравенства (14)

$$|u_0(y, t)| < \frac{M}{\sqrt{t}}.$$

Если $|u_n| \leqslant B_n t^{\frac{2n-1}{2}}$, то на основании неравенства (15) имеем

$$|u_{n+1}(y, t)| \leqslant B_n \frac{2}{2n+1} t^{\frac{2n+1}{2}},$$

и тем самым мы доказали равномерную сходимость ряда (16).

Ростовский на Дону
государственный педагогический
институт

Поступило
15 IV 1953