Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 2

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМИТИВНЫХ ЦИКЛОВ В КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 V 1953)

Теорема Хопфа [1] сводит изучение гомологий (над полем характеристики нуль) компактных групп Ли к построению в этих группах максимальных линейно независимых наборов примитивных классов гомологий. В настоящей заметке указывается простой способ построения таких наборов и дается некоторое усиление теоремы Хопфа.

n° 1. Обозначим через $\mathfrak{H}(P)$ группу всех классов гомологий и через $\overline{\mathfrak{H}}(P)$ группу всех классов ∇-гомологий полиэдра P (под классами гомологий и ∇-гомологий будут постоянно подразумеваться классы слабо гомологичных между собой циклов (соответственно, ∇-циклов) с целыми коэффициентами). Группы $\mathfrak{H}(P)$ и $\overline{\mathfrak{H}}(P)$ являются решетками, т. е. прямыми произведениями свободных циклических групп. Решетка $\overline{\mathfrak{H}}(P)$ образует ассоциативное кольцо относительно умножения Колмогорова — Александрова. Единицу этого кольца будем обозначать через 1. Обычным образцом вводится скалярное произведение (ξ, x), связывающее $\mathfrak{H}(P)$ и $\overline{\mathfrak{H}}(P)$ (значениями (ξ, x) являются целые числа). Элемент ζ из $\overline{\mathfrak{H}}(P)$ называется разложимым, если он представляется в виде $\xi\eta$, где ξ и η — элементы положительной размерности из $\overline{\mathfrak{H}}(P)$. Элемент x из $\mathfrak{H}(P)$ называется примитивным, если он ортогонален ко всем разложимым и ко всем нульмерным элементам из $\overline{\mathfrak{H}}(P)$. Совокупность всех примитивных элементов образует подгруппу $\mathfrak{P}(P)$ группы $\mathfrak{H}(P)$.

Основную роль играет следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть P и P' — полиэдры, S — сфера, F — непрерывное отображение $P\times S$ в P'. Пусть отображение P в P', которое индуцируется F, если фиксировать некоторую точку сферы S, гомологически эквивалентно нулю. Тогда для любого элемента x из $\mathfrak{H}(P\times S)$, имеющего положительную размерность, элемент $F(x)$ является примитивным.*

Доказательство. Базис решетки $\overline{\mathfrak{H}}(S)$ можно составить из двух элементов 1 и ω, где $\dim\omega = \dim S$. Поэтому для любого $\xi \in \overline{\mathfrak{H}}(P')$

$$F^*(\xi) = \eta_1\times 1 + \eta_2\times\omega, \tag{1}$$

где F^* — отображение $\overline{\mathfrak{H}}(P')$ в $\overline{\mathfrak{H}}(P\times S)$, индуцированное отображением F. Обозначим через ρ отображение P в $P\times S$, определенное формулой $\rho(p) = p \times s_0$, где s_0 — фиксированная точка S. Пусть ρ^* — индуцированное ρ отображение $\bar{\mathfrak{H}}(P')$ в $\bar{\mathfrak{H}}(P \times S)$. Из (1)

$$\rho^* F^*(\xi) = \eta_1. \tag{2}$$

По условию теоремы для любого $x \in \mathfrak{H}(P)$ $F\rho(x) = 0$. Поэтому для любого $\xi \in \bar{\mathfrak{H}}(P)$

$$\rho^* F^*(\xi) = 0. \tag{3}$$

Из (2) и (3) $\eta_1 = 0$, и (1) принимает вид $F^*(\xi) = \eta_2 \times \omega$. Поэтому для любых элементов положительной размерности ξ', ξ'' из $\bar{\mathfrak{H}}(P)$ $F^*(\xi' \xi'') = F^*(\xi') F^*(\xi'') = (\eta_2' \times \omega)(\eta_2'' \times \omega) = \pm(\eta_2' \eta_2'') \times (\omega\omega) = 0$. Отсюда $(\xi'\xi'', F(x)) = (F^*(\xi'\xi''), x) = 0$, что и доказывает примитивность $F(x)$.

n° 2. Пусть $\mathfrak{G}$ — компактная связная группа Ли. В $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ вводится так называемое умножение Понтрягина, после чего $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ становится ассоциативным кольцом. Единицей этого кольца служит нульмерный класс гомологий v_0, соответствующий положительно ориентированной точке.

Теорема 2 (усиление теоремы Хопфа *). *Если $x_1, \ldots, x_r$ — базис $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$, то 2^r элементов*

$$v_0, \; x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \quad (i_1 < \ldots < i_k; \; k = 1, 2, \ldots, r)$$

(умножение в смысле Понтрягина) образуют базис группы $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$.

Теорема 3. *Чтобы $x_1, \ldots, x_r$ из $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$ составляли базис $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$, необходимо и достаточно, чтоды $x_1 \ldots x_r = \pm \mathfrak{G}$. (Здесь $\mathfrak{G}$ обозначает основной класс гомологий ориентируемого многообразия $\mathfrak{G}$).*

Теоремы 1 и 3 позволяют легко построить базис решетки $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$ для всех классических групп.

n° 3. Унитарная группа $U(n)$. Пусть R^n — n-мерное комплексное евклидово пространство, K — совокупность комплексных чисел с единичным модулем. Обозначим через $F(z, \lambda)$ $(z \in R^n, \lambda \in K)$ преобразование пространства R^n, умножающее вектор z на λ и оставляющее неизменными все векторы, ортогональные z. Пусть M^{n-1} обозначает $n-1$-мерное комплексное проективное пространство, получающееся из R^n идентификацией пропорциональных векторов. Из очевидного равенства $F(\alpha z, \lambda) = F(z, \lambda)$ вытекает, что функция $F(z, \lambda)$ задает непрерывное отображение $M^{n-1} \times K$ в $U(n)$. Отображение F удовлетворяет условиям теоремы 1 и поэтому переводит всякий элемент положительной размерности из $\mathfrak{H}(M^{n-1} \times K)$ в примитивный класс гомологий унитарной группы. Положим $\mathrm{P}_k = F(M^{k-1} \times K)$, где M^{k-1} обозначает класс гомологий многообразия M^{n-1}, соответствующий $k-1$-мерному проективному подпространству. Легко проверяется, что $\mathrm{P}_1 \mathrm{P}_2 \ldots \mathrm{P}_n = \pm U(n)$. Следовательно (теорема 3), элементы $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ образуют базис $\mathfrak{H}(U(n))$.

n° 4. Ортогональная группа $SO(2n+1)$. Пусть E^{2n+1} — $2n+1$-мерное вещественное евклидово пространство, L_n — совокупность всевозможных ориентированных двумерных плоскостей пространства E^{2n+1}, проходящих через начало координат. Пусть $\Pi \in L_n$. Обозначим через $F(\Pi, t)$ преобразование пространства E^{2n+1}, поворачивающее плоскость Π в положительном направлении на угол t и оставляющее неподвижным ортогональное дополнение Π. Функция F

---

* Отличие теоремы 2 от теоремы Хопфа состоит в том, что теорема Хопфа относится к гомологиям над полем характеристики нуль, в то время как теорема 2 рассматривает слабые гомологии над кольцом целых чисел.

задает непрерывное отображение $L_n \times K$ в $SO(2n+1)$ (K — совокупность действительных чисел, приведенная по модулю 2π). Отображение F удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому элементы $F(L_k \times K)$ примитивны (L_k — совокупность всех элементов из L_n, лежащих в некотором $2k+1$-мерном подпространстве пространства E^{2n+1}). Отображение F индуцирует отображение $\overline{F}$ в $SO(2n+1)$ многообразия $\overline{L_n \times K}$, получающегося из $L_n \times K$ отождествлением точек $\Pi \times t$ и $\Pi' \times (-t)$ (Π' обозначает плоскость Π с измененной ориентацией). При этом $F(L_k \times K) = 2\overline{F}(\overline{L_k \times K})$. Отсюда вытекает, что элементы $\Sigma_{2k} = \overline{F}(\overline{L_k \times K})$ $(k = 1, \ldots, n)$ примитивны. Используя теорему 3, доказываем, что они образуют базис $\mathfrak{P}(SO(2n+1))$.

n° 5. Ортогональная группа $SO(2n)$. Пусть S^{2n-1} — единичная сфера в пространстве E^{2n}. Обозначим через $F_1(z)$ $(z \in S^{2n-1})$ отражение пространства E^{2n} в $2n-1$-мерном подпространстве, ортогональном вектору z. Фиксируем некоторый вектор $z_0 \in S^{2n-1}$. Функция $F(z) = F_1(z) F_1(z_0)$ определяет непрерывное отображение S^{2n-1} в $SO(2n)$. К этому отображению применима теорема 1 (следует положить P равным точке). Поэтому элемент $F(S^{2n-1})$ примитивен. Отображение F индуцирует отображение $\overline{F}$ многообразия $\overline{S^{2n-1}}$, получающегося из S^{2n-1} склеиванием диаметрально противоположных точек, в $SO(2n)$. При этом $F(S^{2n-1}) = 2\overline{F}(\overline{S^{2n-1}})$. Отсюда видно, что элемент $\Omega_n = \overline{F}(\overline{S^{2n-1}})$ примитивен. Проверяем, что $SO(2n-1)\,\Omega_n = \pm SO(2n)$. На основании теоремы 3 заключаем, что элементы $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_{2(n-1)}, \Omega_n$ образуют базис $\mathfrak{P}(SO(2n))$.

n° 6. Симплектическая группа $Sp(2n)$ может быть определена как группа всех унитарных матриц порядка $2n$, оставляющих инвариантной билинейную форму $\sum_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i)$. Зададим отображение γ пространства R^{2n} на себя формулой $\gamma(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = (\overline{x}_{n+1}, \ldots, \overline{x}_{2n}, -\overline{x}_1, \ldots, -\overline{x}_n)$* и положим, что функция $\varphi(z, \lambda) = F(z, \lambda) F(\gamma(z), \lambda^{-1})$, где $F(z, \lambda)$ определена в n° 3. Функция $\varphi(z, \lambda)$ определяет непрерывное отображение $M^{2n-1} \times K$ в $Sp(2n)$, удовлетворяющее условиям теоремы 1. Отображение φ индуцирует отображение $\overline{\varphi}$ в симплектическую группу многообразия $\overline{M^{2n-1} \times K}$, получающегося из $M^{2n-1} \times K$ склеиванием точек $z \times \lambda$ и $\gamma(z) \times \lambda^{-1}$. Элементы $\overline{\varphi}(\overline{M^{2k-1} \times K}) = T_{2k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ примитивны и образуют базис решетки $\mathfrak{P}(Sp(2n))$.

n° 7. Общая конструкция. Пусть $\mathfrak{G}$ — компактная группа Ли и K — ее замкнутая однопараметрическая подгруппа. Обозначим через Z связную компоненту единицы в централизаторе подгруппы K, через W — пространство левых классов смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе Z. Рассмотрим отображение $W \times K$ в $\mathfrak{G}$, задаваемое формулой $F(X, h) = xhx^{-1}$, где $X \in W$, $h \in K$ и x — произвольный элемент класса смежности X (очевидно, значенне xhx^{-1} не зависит от выбора $x \in X$). При отображении F $W \times e$ переходит в единицу группы $\mathfrak{G}$; подгруппа K гомеоморфна окружности. Следовательно, применима теорема 1 и для любого элемента z из $\mathfrak{H}(W)$, имеющего положительную размерность, $F(z \times K) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{G})$.

---

* В этой формуле $x_1, \ldots, x_{2n}$ обозначают координаты вектора из R^{2n}, черта означает переход к комплексно-сопряженным числам.

Для групп $U(n)$, $SO(2n+1)$ и $Sp(2n)$ эта конструкция позволяет получить базис решетки $\mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ (ср. $n^\circ n^\circ$ 3, 4 и 6).

n° 8. Классы гомологий, построенные нами в $n^\circ n^\circ$ 3—6, совпадают с классами гомологий, описанными в работе Л. С. Понтрягина (2). Примитивность этих классов доказана, повидимому, впервые. Конструкция, описанная в n° 7, содержится в несколько иной форме в работе Е. Штифеля (3), но без указания на то, что она дает примитивные классы гомологий.

Поступило
29 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Hopf, Ann. of Math., 42, 22 (1941). [2] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 6, 389 (1939). [3] E. Stiefel, Colloque intern. du Centre Nat. de la Recherche, Paris, No. 12, Topologie algébrique, 1949, p. 97.