Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Л. БРУДНО

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ НОРМЫ МАТРИЦ ТЕПЛИЦА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 IV 1953)

Обозначения. Последовательность действительных чисел обозначается одной буквой $x = \{x^1, x^2, \ldots\}$. Матрица Теплица [1] обозначается $A = (a_k^n)$, где n — номер строки и k — номер столбца; ее n-я строка обозначается $A^n = \{a_1^n, a_2^n, \ldots\}$. Далее, $A^n(x) = a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \ldots$ и преобразованная последовательность обозначается $A(x) = \{A^1(x), A^2(x), \ldots\}$. Мы пользуемся двумя нормами последовательности $|x| = \sup|x^\varkappa|$ $(1 \leqslant \varkappa < \infty)$ и $\|x\| = \overline{\lim}|x^\varkappa|$ $(\varkappa \to \infty)$. Кроме того, $|x|_s^k = \sup|x^\varkappa|$, где sup берется по значениям $s \leqslant \varkappa < k$. Под нормой строки понимается число $|A^{(n)}| = |a_1^n| + |a_2^n| + \ldots$ Наконец, $|A| = \sup|A^n|$ и $\|A\| = \overline{\lim}|A^n|$. Если существует предел $A^\infty(x) = \lim A^n(x)$, то говорят, что последовательность x суммируется матрицей A (к пределу $A^\infty(x)$). Множество ограниченных последовательностей, суммируемых матрицей Теплица, называется полем.

На протяжении всей заметки $x, y, \ldots$ или $x_m, y_m, \ldots$ обозначают ограниченные последовательности. $A, B, A_i, \ldots$ обозначают матрицы Теплица, а $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}_i, \ldots$ — их поля. Мы говорим, что B сильнее, не слабее, равносильна A, если $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Тот же смысл имеют и обозначения $B \supset A$, $B \supseteq A$, $B \approx A$. Кроме того мы пользуемся обозначениями для единичной последовательности $e = \{1, 1, \ldots\}$ и единичной матрицы (Теплица) $E = (e_k^n)$, где $e_n^n = 1$ и $e_k^n = 0$ при $n \neq k$.

В заметке рассматриваются две задачи:

1°. Изучить как функцию δ максимально возможную величину $\|B(x)\|$, если $\|x\| \leqslant 1$ и $\|A(x)\| \leqslant \delta$.

2°. Оценить максимально возможную величину $|B^m(x)|$, если $|x| \leqslant 1$ и $|A(x)|_n^\infty \leqslant \delta$.

В § 1 рассматривается задача 1°. В § 2 задача 2° сводится к задаче 1°. В §§ 3 и 4 рассматриваются три частных случая. В §§ 5 и 6 полученные результаты прилагаются к построению матрицы более сильной, чем счетное число заданных. § 7 составляет пример.

§ 1. Относительные нормы. Определения. 1) Нормой B относительно A называется функция $N_A^B(\delta) = \sup\|B(x)\|$, где sup берется по всем последовательностям x, для которых $\|x\| \leqslant 1$ и $\|A(x)\| \leqslant \delta$. 2) Пусть неотрицательная функция $f(\delta)$ определена при всех $\delta \geqslant 0$. Пусть, далее, F — множество точек плоскости $\delta O f$, удовлетворяющих обоим условиям $\delta \geqslant 0$ и $0 \leqslant f \leqslant f(\delta)$. Функция $f(\delta)$ называется звездной для точки (a, b), если множество F вслед за любой точкой (δ, f) содержит все точки отрезка, соединяющего (δ, f) с (a, b)

3) Функция $f = f(\delta)$ называется норма-функцией, если она: определена при всех $\delta \geqslant 0$; неотрицательна; монотонно не убывает; звездна для точек (0, 0) и (1, 1); непрерывна справа в точке $\delta = 0$; существует число δ_0 такое, что $f(\delta) = f(\delta_0)$ при всех $\delta \geqslant \delta_0$.

Замечание. Согласно определению: $\| B(x) \| \leqslant N_A^B(\delta)$ коль скоро $\| x \| \leqslant 1$ и $\| A(x) \| \leqslant \delta$; $\| B(x) \| \leqslant N_A^B [\| A(x) \|]$ коль скоро $\| x \| \leqslant 1$.

Теорема 1. *Для фиксированных матриц A, B и числа* $\delta \geqslant 0$ *найдется последовательность x, для которой*

$$\| x \| \leqslant 1, \quad \| A(x) \| \leqslant \delta, \quad \| B(x) \| = N_A^B(\delta).$$

Если $0 \leqslant \delta \leqslant \| A \|$, *то последовательность x можно выбрать так, чтобы кроме того* $\| A(x) \| = \delta$.

Теорема 2. *Норма B относительно A есть норма-функция, причем* $N_A^B(\delta) = \| B \|$ *при всех* $\delta \geqslant \| A \|$. *Обратно: если* $N(\delta)$ — *норма-функция и* $N(\delta) = N(\delta_0)$ *при всех* $\delta \geqslant \delta_0$, *то найдутся матрицы B и A такие, что* $\| A \| = \delta_0$, $N_A^B(\delta_0) = \| B \|$ *и* $N_A^B(\delta) \equiv N(\delta)$.

§ 2. Теорема 3 (основная). *Пусть фиксированы матрицы A и B. Тогда* $| B^m(x) | \leqslant N_A^B(\delta) + M_A^B(m, n)$ *коль скоро* $| x | \leqslant 1$ *и* $| A(x) |_n^\infty \leqslant \delta$, *где* $M_A^B(m, n)$ *не зависит ни от x, ни от* δ *и* $M_A^B(m, n) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

§ 3. Несколько частных случаев.

Теорема 4. *Для того чтобы* $B \supseteq A$, *необходимо и достаточно выполнение равенства* $N_A^B(0) = 0$.

Достаточную часть можно несколько усилить. Пусть $N(\delta)$ — норма-функция, причем $N(0) = 0$ и $N(\delta) = N(\delta_0)$ при всех $\delta \geqslant \delta_0$. Тогда найдутся равносильные матрицы B и A, для которых $\| A \| = \delta_0$, $\| B \| = N(\delta_0)$, $N_A^B(\delta) \equiv N(\delta)$.

Отметим еще два частных случая. Для любой матрицы B $N_E^B(\delta) = \| B \| \delta$ $(= \| B \|)$ при $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ (при $\delta \geqslant 1$). Для каждой матрицы A найдется δ_0 $(0 \leqslant \delta_0 \leqslant 1)$ такое, что $N_A^E(\delta) = \delta : \delta_0$ $(= 1)$ при $\delta < \delta_0$ (при $\delta \geqslant \delta_0$).

§ 4. Отметим два приложения предыдущего параграфа.

Теорема 5. *Для того чтобы A была равносильна E, необходимо и достаточно, чтобы существовало число* $\delta_0 > 0$ *такое, что* $\| A(x) \| \geqslant \delta_0 \| x \|$ *для всякой ограниченной последовательности x.*

Теорема 6. *Пусть* $B \supseteq A$. *Тогда, каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$ *и натуральное число n, найдутся такие:* $\delta > 0$ (δ *можно взять любым, удовлетворяющим условию* $N_A^B(\delta) < \varepsilon : 2$) *и m, что из неравенств* $| A(x) |_n^\infty \leqslant \delta$, $| x | \leqslant 1$ *будет следовать* $| B(x) |_m^\infty < \varepsilon$. *В частности, это означает, что всякое множество последовательностей, равномерно ограниченных (по норме* $| x |$*) и равномерно суммируемых матрицей A, также равномерно суммируются и B.*

§ 5. В терминах относительных норм можно указать условия для того, чтобы матрица A, построенная из достаточно далеких строк заданных матриц $A_1, A_2, \ldots$, была бы матрицей Теплица и имела поле, покрывающее объединение полей $\bigcup \mathfrak{A}_i$.

Теорема 7. *Пусть заданы матрицы* $A_1, A_2, \ldots$ *Определим матрицу A равенствами*

$$A^i = A_i^{n^i}, \quad n^i \geqslant m^i \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Для существования последовательности $m^1, m^2, \ldots$ *такой, чтобы всякая матрица A, определенная равенствами* (1), *была матрицей*

Теплица и имела поле $\mathfrak{A} \supseteq \bigcup \mathfrak{A}_i$, *необходимо и достаточно условие*

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{i\to\infty}} N_{A_k}^{A_i}(\delta) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если для заданных матриц $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ldots$, *то для существования последовательности* $m^1, m^2, \ldots$ *с указанными свойствами необходимо и достаточно условие*

$$N_{A_k}^{A_{k+i}}(\delta) \underset{\delta\to 0}{\overset{i}{\longrightarrow}} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

§ 6. Теоремы 7 и 8 дают достаточные условия существования матрицы более сильной, чем счетное число заданных. По самой природе относительных норм эти условия не необходимы. Но им можно придать вид необходимых и достаточных условий.

Теорема 8. *Пусть заданы матрицы* $A_1, A_2, \ldots$ *Для существования матрицы* A *такой, что* $\mathfrak{A} \supset \bigcup \mathfrak{A}_i$, *необходимо и достаточно, чтобы матрицы* A_i *можно было заменить равносильными матрицами* A_i^*, *для которых*

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{i\to\infty}} N_{A_k^*}^{A_i^*}(\delta) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, *то для существования такой матрицы* A, *необходимо и достаточно, чтобы равносильные матрицы* A_i^* *можно было выбрать удовлетворяющими условию*

$$N_{A_k^*}^{A_{k+i}^*}(\delta) \underset{\delta\to 0}{\overset{i}{\longrightarrow}} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

§ 7. В заключение мы отметим, что условия, аналогичные теоремам 7 и 8, нельзя сформулировать в терминах обычных норм.

Вспомогательный пример. Каждому числу $\delta \in (0, 1]$ можно поставить в соответствие матрицу Теплица B_δ и последовательность x_δ так, что: 1) $|B_\delta| = 1$, $|x_\delta| = 1$ при всех $\delta \in (0, 1)$; 2) $B_{\delta''} \subset B_{\delta'}$ коль скоро $0 < \delta' < \delta'' \leqslant 1$; 3) $\| B_\delta(x_{\delta'}) \| \leqslant \delta' : \delta$ при всех $\delta, \delta' \in (0, 1]$; 4) $B_\delta^\infty(x_{\delta'}) = 1$ коль скоро $0 < \delta \leqslant \delta' \leqslant 1$.

Построение. Выберем в интервале $(0, 1)$ счетную всюду плотную последовательность точек $y = \{y^1, y^2, \ldots\}$. Введем две функции. Пусть $i(\delta, n)$ — минимальное из чисел i, бо́льших n и удовлетворяющих условию $y^i < \delta$. Пусть $j = j(\delta, n)$ таково, что $y^j = \max y^k$, где k пробегает все натуральные значения меньшие n и удовлетворяющие условию $y^k < \delta$. Функция $i(\delta, n)$ определена при всех n и $\delta > 0$. Функция $j(\delta, n)$ определена при всех $n > n(\delta)$, где $n(\delta)$ — минимальное из чисел n, удовлетворяющих условию $y^n < \delta$.

Определим матрицы $B_\delta \equiv (b_{\delta k}^n)$, полагая

$$b_{\delta k}^n = \begin{cases} y^k : \delta & \text{при } k = i(\delta, n); \\ 1 - y^{i(\delta, n)} : \delta & \text{при } k = j(\delta, n); \\ 0 & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Согласно этому определению для любой последовательности x при $n > n(\delta)$ имеем

$$B_\delta^n(x) = [1 - y^{i(\delta, n)} : \delta]\, x^{j(\delta, n)} + [y^{i(\delta, n)} : \delta]\, x^{i(\delta, n)}.$$

Определим последовательности x_δ, полагая $x_\delta^k = 1$, если $y^k < \delta$, и $x_\delta^k = 0$, если $y^k \geqslant \delta$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Частным случаем предыдущего является

Пример 1. Существует последовательность матриц $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и последовательностей $x_1, x_2, \ldots$ таких, что $|A_n| = 1$; $|x_n| = 1$ и $\| A_1(x_n) \| \leqslant 1 : n$; $A_n^\infty(x_n) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Этот пример представляет самостоятельный интерес и из него вытекает нужный нам

Пример 2. Существует последовательность матриц $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, для которых $|A_1| = |A_2| = \ldots = 1$ и не существует матрицы A такой, что $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A$.

При получении результатов настоящей заметки использована лемма о переползании (2).

Поступило
13 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Toeplitz, Prace Matematyczne-Fizyczne, 22, 113 (1911). [2] А. Л. Брудно, ДАН, 91, № 1 (1953).