Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 2

МАТЕМАТИКА

З. И. БОРЕВИЧ

ОБ ОДНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ С ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 V 1953)

1. Абелеву группу, для которой группа G является группой (левых) операторов, будем называть G-модулем.

Рассмотрим представление $G \cong F / R$ произвольной группы G в виде фактор-группы свободной группы F. В классах смежности F по R выберем по представителю $u_\sigma \in F$, $\sigma \in G$, $u_1 = 1$ так, что $\sigma \leftrightarrow u_\sigma R$ в силу заданного представления. Абелева группа $R_0 = R / [R, R]$, записанная аддитивно, естественным образом является G-модулем ([1]). Именно, для $\bar{x} = x[R, R]$, $x \in R$ и $\sigma \in G$ полагаем

$$\sigma\bar{x} = \overline{u_\sigma x u_\sigma^{-1}}.$$

G-модуль R_0 однозначно определен представлением $G \cong F / R$.

Функция f, определяемая равенством

$$f(\sigma, \tau) = \overline{u_\sigma u_\tau u_{\sigma\tau}^{-1}} \in R_0, \quad \sigma, \tau \in G,$$

есть 2-мерный нормализованный цикл группы G в группе R_0 ([1]).

Обозначим через E свободную абелеву группу, порожденную элементами e_σ, $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$, как свободными образующими. Составим прямую сумму

$$W = E + R_0.$$

Группа W становится G-модулем согласно следующему определению. На элементах из R_0 действие операторов определено выше, а для $e_\tau \in E$ полагаем

$$\sigma e_\tau = e_{\sigma\tau} - e_\sigma + f(\sigma, \tau)$$

(для удобства полагаем $e_1 = 0$). Легко видеть, что G-модуль W однозначно определен представлением $G \cong F / R$.

Дадим еще одно определение. G-модуль A называется **свободным G-модулем**, если в A существуют элементы a_α такие, что σa_α, $\sigma \in G$, образуют свободный базис свободной абелевой группы A. Свободная абелева группа O, порожденная элементами $\sigma \in G$ как свободными образующими, естественным образом является G-модулем (групповое кольцо). Всякий свободный G-модуль есть прямая сумма G-модулей, операторно изоморфных O.

Теорема 1. *G-модуль W является свободным G-модулем.*

Доказательство. В группе F выберем систему свободных образующих v_α и v_λ так, чтобы $v_\alpha R \leftrightarrow \sigma_\alpha$, $v_\lambda \in R$, где σ_α — различные отличные от единицы элементы группы G (образующие v_λ могут отсутствовать). Систему представителей u_σ из классов смежности F по R подчиняем следующим условиям: 1) $u_{\sigma_\alpha} = v_\alpha$; 2) если неприводимое слово $v_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots v_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i=\pm 1$, является представителем некоторого класса, то и всякий его отрезок $v_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots v_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$, $0\leqslant k<n$, также является представителем ([2]). Образующие v_λ не входят в слова u_σ.

Как известно ([2]), неравные единице элемены $u_\sigma v_\alpha u_{\sigma\sigma_\alpha}^{-1}$ и $u_\sigma v_\lambda u_\sigma^{-1}$ образуют свободную систему образующих для группы R. Неравные нулю элементы $f(\sigma, \sigma_\alpha)$ и $\sigma\bar{v}_\lambda$ будут образовывать (свободный) базис R_0. Заметим, что $f(\sigma, \sigma_\alpha)=0$ тогда и только тогда, когда $u_\sigma v_\alpha=u_{\sigma\sigma_\alpha}$.

Утверждаем теперь, что элементы σe_{σ_α} и $\sigma\bar{v}_\lambda$ образуют базис группы W.

Рассмотрим подгруппу W' группы W, порожденную элементами σe_{σ_α} и $\sigma\bar{v}_\lambda$. В силу равенства

$$\sigma e_{\sigma_\alpha}=e_{\sigma\sigma_\alpha}-e_\sigma+f(\sigma, \sigma_\alpha)$$

каждый элемент из W сравним $\operatorname{mod} W'$ с линейной комбинацией элементов e_σ. Если $u_\sigma=u_\tau v_\alpha$, то $\tau e_{\sigma_\alpha}=e_\sigma-e_\tau$, ибо $f(\tau, \sigma_\alpha)=0$. Если же $u_\sigma=u_\tau v_\alpha^{-1}$, то $\sigma e_{\sigma_\alpha}=e_\tau-e_\sigma$, ибо в этом случае $f(\sigma, \sigma_\alpha)=0$. Таким образом, для любого σ

$$e_\sigma\equiv e_\tau\equiv\cdots\equiv e_1=0 \pmod{W'}.$$

Этим доказано, что $W'=W$.

Остается доказать, что элементы σe_{σ_α} линейно независимы. Пусть

$$\sum m_{\sigma,\alpha}\,\sigma e_{\sigma_\alpha}=0,$$

где суммирование ведется по некоторой конечной совокупности пар (σ, α). Имеем

$$\sum m_{\sigma,\alpha}(e_{\sigma\sigma_\alpha}-e_\sigma)+\sum m_{\sigma,\alpha}f(\sigma, \sigma_\alpha)=0.$$

Так как не равные нулю элементы $f(\sigma, \sigma_\alpha)$ линейно независимы, то $m_{\sigma,\alpha}=0$, если только $u_\sigma v_\alpha\neq u_{\sigma\sigma_\alpha}$. Среди оставшихся пар (σ, α) (таких, что $u_\sigma v_\alpha=u_{\sigma\sigma_\alpha}$) выделим пары (τ, β), для которых неприводимое слово u_τ имеет максимальную длину. Если для некоторой пары (τ, β) слово $u_{\tau\sigma_\beta}=u_\tau v_\beta$ имеет длину бо́льшую, чем u_τ, то элемент $e_{\tau\sigma_\beta}$ встретится в сумме

$$\sum m_{\sigma,\alpha}(e_{\sigma\sigma_\alpha}-e_\sigma)=0$$

только один раз, а значит, $m_{\tau,\beta}=0$. Если же для каждой пары (τ, β) будем иметь $u_\tau=u_\varphi v_\beta^{-1}$, то e_τ в последней сумме встретится только один раз. Опять $m_{\tau,\beta}=0$. Линейная независимость элементов σe_{σ_α} доказана.

2. Из доказательства теоремы 1 следует, что *G-модуль R_0 можно определить помимо представления $G\cong F/R$.*

Именно, пусть σ_α — какая-нибудь система образующих группы G. Строим свободный G-модуль W, взяв символы σe_α в качестве свободной системы образующих абелевой группы W. Отображение

$$e_\alpha\to\sigma_\alpha-1$$

определяет операторный гомоморфизм W на $S\subset O$. Ядром этого гомоморфизма и является группа R_0 (для подходящего представления).

Теорема 1 позволяет легко установить ряд редукционных теорем из теории групп гомологий.

Пусть $\mathfrak{A}$ — левый G-модуль. Известно ([3]), что $H^n(G, \operatorname{Hom}(W, \mathfrak{A}))=0$, $n>0$, где $\operatorname{Hom}(W, \mathfrak{A})$ есть двусторонний G-модуль ([5]). Ядро есте ственного гомоморфизма $\mathrm{Hom}(W, \mathfrak{A}) \to \mathrm{Hom}(R_0, \mathfrak{A})$ операторно изоморфно группе $\mathrm{Hom}(S, \mathfrak{A})$. Отображение $\sigma \to 1$, $\sigma \in G$, дает нам гомоморфизм O на группу J целых рациональных чисел (с тождественными операторами). Ядро гомоморфизма $\mathrm{Hom}(O, \mathfrak{A}) \to \mathrm{Hom}(S, \mathfrak{A})$ операторно изоморфно группе $\mathrm{Hom}(J, \mathfrak{A}) \cong \mathfrak{A}$. Применяя теперь теорему Фаддеева ([4], [5]), получаем редукционную теорему Эйленберга и Маклейна ([1]):

$$H^n(G, \mathrm{Hom}(R_0, \mathfrak{A})) \cong H^{n+1}(G, \mathrm{Hom}(S, \mathfrak{A})) \cong H^{n+2}(G, \mathfrak{A}), \quad n > 0.$$

Для случая $n = 0$ получаем:

Теорема 2. *Группа $H^2(G, \mathfrak{A})$ изоморфна фактор-группе группы операторных гомоморфизмов R_0 в $\mathfrak{A}$ по подгруппе тех гомоморфизмов, которые могут быть продолжены до операторных гомоморфизмов W в $\mathfrak{A}$*:

$$H^2(G, \mathfrak{A}) \cong \mathrm{OpHom}(R_0, \mathfrak{A}) / \mathrm{OpHom}(W, \mathfrak{A})|_{R_0}.$$

Действительно, левая и правая часть изоморфны группе $H^1(G, \mathrm{Hom}(S, \mathfrak{A}))$ ([5]).

Для конечной группы G теорема 2 может быть сформулирована в терминах только группы R_0. Именно, для любого гомоморфизма g группы R_0 в $\mathfrak{A}$ положим

$$\overline{g}(r) = \sum_{\sigma \in G} \sigma g(\sigma^{-1} r), \quad r \in R_0.$$

Теорема 3. *Для конечной группы G имеем*

$$H^2(G, \mathfrak{A}) \cong \mathrm{OpHom}(R_0, \mathfrak{A}) / \overline{\mathrm{Hom}(R_0, \mathfrak{A})},$$

где знаменатель фактор-группы справа есть образ группы $\mathrm{Hom}(R_0, \mathfrak{A})$ *при гомоморфизме $g \to \overline{g}$.*

Доказательство следует из того факта, что каждый операторный гомоморфизм h группы W в $\mathfrak{A}$ представим в виде $h(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma l(\sigma^{-1} x)$, $x \in W$, где l — некоторый гомоморфизм W в $\mathfrak{A}$.

Для нижних групп гомологий можно получить двойственные редукционные теоремы без привлечения теории характеров. Пусть $\mathfrak{B}$ — правый G-модуль. Тензорное произведение $R_0 * \mathfrak{B}$ естественным образом является двусторонним G-модулем ([5]). Имеем:

$$H_n(G, W * \mathfrak{B}) = 0, \quad n > 0,$$

откуда следует

$$H_n(G, R_0 * \mathfrak{B}) \cong H_{n+1}(G, S * \mathfrak{B}) \cong H_{n+2}(G, \mathfrak{B}), \quad n > 0.$$

Если G — конечная группа, то

$$H_2(G, \mathfrak{B}) \cong \Phi / \Psi,$$

где Φ есть совокупность $y \in R_0 * \mathfrak{B}$ таких, что $\sum_{\sigma} \sigma y \sigma^{-1} = 0$, а Ψ порождено элементами $\sigma r \cdot b - r \cdot b \sigma$, $r \in R_0$, $b \in \mathfrak{B}$. В частности, $H_2(G, J)$ изоморфна фактор-группе группы тех $r \in R_0$, для которых $\sum_{\sigma} \sigma r = 0$, по подгруппе, порожденной элементами $\sigma r - r$. Для конечной группы G получаем также изоморфизм $H_{n+2}(G, \mathrm{Hom}(R_0, \mathfrak{A})) \cong H_n(G, \mathfrak{A})$, $n > 0$, двойственный изоморфизму $H^{n+2}(G, R_0 * \mathfrak{B}) \cong H^n(G, \mathfrak{B})$, полученному в ([5]).

Поступило
29 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Eilenberg, S. MacLane, Ann. of Math., 48, № 1, 51 (1947). [2] А. Г. Курош, Теория групп, 1953. [3] R. G. Lyndon, Ann. of Math., 52, № 3, 650 (1950). [4] Д. К. Фаддеев, ДАН, 58, № 3, 361 (1947). [5] З. И. Боревич, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, № 4, 365 (1952).