Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 2

МАТЕМАТИКА

М. Ш. БИРМАН

К ТЕОРИИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 V 1953)

Основные результаты в теории полуограниченных самосопряженных расширений симметричного положительного оператора принадлежат М. Г. Крейну ([1]). Особенно подробно М. Г. Крейном исследован случай, когда исходный оператор является положительно определенным*. С теорией М. Г. Крейна соприкасаются результаты М. И. Вишика ([2]), рассматривавшего более общий вопрос о «разрешимых» (в том или ином смысле) расширениях произвольного оператора, имеющего ограниченный обратный. В том случае, когда исходный оператор является симметричным, М. И. Вишиком особо исследован вопрос о его самосопряженных расширениях. Настоящая заметка имеет своей целью несколько дополнить некоторые из результатов М. Г. Крейна и М. И. Вишика.

Пусть S — замкнутый положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Обозначим через S^* сопряженный с S оператор, через U — подпространство решений уравнения $S^*u=0$ и через S_μ — «жесткое» (см. ([1])) самосопряженное расширение оператора S. Результаты М. И. Вишика в применении к рассматриваемому случаю позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Область определения оператора S^* разлагается в прямую сумму*

$$D(S^*) = D(S) \dotplus S_\mu^{-1}U \dotplus U.$$

Для того чтобы оператор $\tilde{S}$ являлся самосопряженным расширением S, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\tilde{S}$ задавался как часть S^* на прямой сумме

$$D(\tilde{S}) = D(S) \dotplus (S_\mu^{-1} \dotplus B)\,\tilde{U}_1 \dotplus U_0.$$

Здесь B — самосопряженный оператор в некотором подпространстве U_1, содержащемся в U; $\tilde{U}_1 = D(B)$ — плотное подмножество U_1; $U_0 = U \ominus U_1$.

Некоторый интерес представляет дальнейшая характеристика самосопряженных расширений оператора S в терминах оператора B. Следующая теорема характеризует полуограниченные расширения оператора S. Пусть $\gamma > 0$ — нижняя граница оператора S, число $\alpha < \gamma$ и $R_\alpha = (S_\mu - \alpha E)^{-1}$.

* Мы называем оператор положительно определенным, если его нижняя граница положительна.

Теорема 2. *Для того чтобы самосопряженное расширение* $\tilde{S}$ *оператора* S *удовлетворяло при всех* $g \in D(\tilde{S})$ *условию*

$$(\tilde{S} g, g) \geqslant \alpha (g, g),$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех $v \in D(B^{-1})$ *выполнялось условие*

$$(B^{-1} v, v) \geqslant \alpha (v, v) + \alpha^2 (R_\alpha v, v).$$

Отметим, что здесь, как и в дальнейшем, мы считаем $D(B^{-1}) = R(B) \dot{+} U_0$, распространяя B^{-1} на U_0 нулем. Из теоремы 2 следует, что положительность и положительная определенность операторов $\tilde{S}$ и B^{-1} имеет место одновременно. В качестве другого следствия теоремы 2 отметим, что оператор B^{-1} порождает полуограниченное расширение $\tilde{S}$ с нижней границей $m(\tilde{S}) \geqslant \gamma c(\gamma + c)^{-1}$, если $m(B^{-1}) = c > -\gamma$.

М. Г. Крейном (1) отмечено, что для характеристики полуограниченного расширения $\tilde{S}$ важную роль играет соответствующее ему множество $D[\tilde{S}]$, которое представляет собой замыкание $D(\tilde{S})$ в норме $|g|^2 = (\tilde{S} g, g) - \beta(g, g)$, $\beta < m(\tilde{S})$. М. Г. Крейн показал, что

$$D[\tilde{S}] = D[S_\mu] \dot{+} D[\tilde{S}] \cap U.$$

Множество $D[\tilde{S}] \cap U$ характеризуется следующей теоремой.

Теорема 3. *Для всякого полуограниченного расширения* $\tilde{S}$ *оператора* S

$$D[\tilde{S}] \cap U = D[B^{-1}],$$

и, следовательно,

$$D[\tilde{S}] = D[S_\mu] \dot{+} D[B^{-1}].$$

Доказательство теоремы в существенном опирается на следующую лемму.

Лемма. *Если* $\beta < m(\tilde{S})$, *то существует положительное число* $\eta < 1$ *такое, что*

$$\beta^2 |(f, v)|^2 \leqslant \eta^2 [(S_\mu f, f) - \beta(f, f)] [(B^{-1} v, v) - \beta(v, v)]$$

для всех $f \in D(S_\mu)$ *и* $v \in D(B^{-1})$.

О характере спектра оператора $\tilde{S}$ также иногда удается судить на основании сведений о характере спектра оператора B. Так, из результатов М. И. Вишика (2) следует, что при условии полной непрерывности оператора S_μ^{-1} полная непрерывность операторов $\tilde{S}^{-1}$ и B имеет место одновременно. М. Г. Крейном получены теоремы*, позволяющие судить о числе отрицательных собственных значений самосопряженных расширений положительно определенного оператора с конечным индексом дефекта. С учетом теорем 1 и 3 результат М. Г. Крейна можно сформулировать следующим образом: *число отрицательных собственных значений (с учетом их кратности) оператора* $\tilde{S}$ *в точности равно числу отрицательных собственных значений оператора* B^{-1}. Обобщением результата М. Г. Крейна на случай оператора с бесконечным индексом дефекта является следующая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы отрицательная часть спектра самосопряженного расширения* $\tilde{S}$ *оператора* S *состояла из ограниченного снизу множества собственных значений конечного ранга и не имела отличных от нуля точек сгущения, необходимо и доста-*

* См. теоремы 19 и 20 работы (1).

точно, чтобы тем же свойством обладала отрицательная часть спектра оператора B^{-1}. При этом, если один из операторов $\tilde{S}$, B^{-1} имеет конечное число отрицательных собственных значений, то и другой оператор имеет точно такое же число отрицательных собственных значений.

Ниже приводятся теоремы, являющиеся некоторым дополнением к теореме 1.

Теорема 5. *Для того чтобы оператор S' являлся замкнутым симметричным положительно определенным расширением оператора S, необходимо и достаточно, чтобы S' задавался как часть S^* на прямой сумме*

$$D(\tilde{S}) = D(S) \dotplus (S_\mu^{-1} + B')\, U'.$$

Здесь U' — некоторое подпространство U; B' — симметричный оператор, переводящий U' в U и удовлетворяющий условию

$$(B'u', B'u') \leqslant m\,(B'u', u') \qquad (m > 0,\ u' \in U').$$

Рассмотрим теперь вопрос о самосопряженных расширениях оператора S'. Пусть $\overline{U} = \mathcal{H} \ominus R(S') = U \ominus U'$; U_0' — некоторое подпространство $\overline{U}$; $U_1' = \overline{U} \ominus U_0'$; $U_1 = U' \oplus U_1'$ и P' — проектор в $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \ominus U_0'$.

Теорема 6. *Для того чтобы оператор $\tilde{S}$ являлся самосопряженным расширением оператора S', необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{S}$ задавался как часть S^* на прямой сумме*

$$D(\tilde{S}) = D(S) \dotplus (S_\mu^{-1} + \tilde{B})\, \tilde{U}_1 \dotplus U_0'.$$

Здесь $\tilde{U}_1 = D(\tilde{B})$, а $\tilde{B}$ — некоторое самосопряженное расширение симметричного оператора $P'B'$ на U_1.

Пусть подпространство U_0' состоит только из нулевого элемента. Тогда $U_1 = U$. Среди ограниченных положительных самосопряженных расширений симметричного оператора B' на U найдется минимальное * расширение B_μ'.

Теорема 7. *Область определения жесткого расширения S_μ' оператора S' представляется прямой суммой*

$$D(S_\mu') = D(S) \dotplus (S_\mu^{-1} + B_\mu')\, U.$$

Ленинградский горный институт

Поступило 29 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, Матем. сборн., **20** (62) : 3, 431 (1947). [2] М. И. Вишик, Тр. Московск. матем. об-ва, 1 (1952).

* См. теорему 1 работы ([1]).