

С. Д. БЕРМАН

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ЦЕНТРОВ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ p -ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 21 IV 1953)

Пусть G — группа, K — поле. Через $R(G, K)$ условимся обозначать групповое кольцо G над K . В дальнейшем мы будем предполагать, что G — конечная группа, порядок которой не делится на характеристику K .

Нерешенным является следующий вопрос: даны группа G и поле K . Каковы все группы H , для которых $R(G, K) \cong R(H, K)$? Перлис и Уокер⁽⁵⁾ показали, как для фиксированных абелевых групп G и H найти все поля K такие, что $R(G, K) \cong R(H, K)$.

В настоящей заметке доказывается необходимое и достаточное условие изоморфизма центров групповых колец p -групп ($p \neq 2$). При этом используется понятие K -отдела группы, введенное в⁽²⁾. Соответствующая теорема оказывается справедливой для групповых колец абелевых p -групп при произвольном простом p .

Мы будем пользоваться обозначениями и терминологией заметки⁽²⁾.

Пусть G — группа порядка h ; C_1, \dots, C_t — классы сопряженных элементов G ; g_1, \dots, g_t — система представителей этих классов; h_i — порядок класса C_i ($i = 1, \dots, t$); n — общее наименьшее кратное порядков элементов G ; K — поле; \bar{K} — алгебраически замкнутое поле, содержащее K ; k_i — сумма элементов класса C_i в $R(G, K)$ ($i = 1, \dots, t$); $\chi_1(g), \dots, \chi_t(g)$ — характеры G .

$R(G, K)$ и $R(G, \bar{K})$ разлагаются в прямую сумму минимальных двухсторонних идеалов:

$$R(G, K) = I_1 + \dots + I_t; \quad (1)$$

$$R(G, \bar{K}) = \bar{I}_1 + \dots + \bar{I}_t. \quad (2)$$

Пусть идеал I_i (\bar{I}_i) порождается идемпотентом центра e_i (\bar{e}_i). Тогда

$$1 = e_1 + \dots + e_t; \quad 1 = \bar{e}_1 + \dots + \bar{e}_t.$$

Разложению (1) соответствует разложение центра Z кольца $R(G, K)$ в прямую сумму подполей поля $K(\epsilon)$, где ϵ — первообразный корень степени n из 1:

$$Z = Z_1 + \dots + Z_r \quad (Z_i \text{ — центр } I_i; \quad i = 1, \dots, r). \quad (3)$$

Имеют место формулы⁽³⁾:

$$e_i = \frac{n_i}{h} \sum_{m=1}^t \chi_i(g_m^{-1}) k_m; \quad k_i = h_i \sum_{m=1}^t \frac{\chi_m(g_i)}{n_m} \bar{e}_m \quad (4)$$

(n_i — порядок полного матричного кольца \bar{I}_i).

Напомним определение K -отделов группы и характеров, данное в⁽²⁾. Обозначим через Γ группу Галуа поля $K(\epsilon)$ над K . Будем говорить, что характер $\chi_j(g)$ K -сопряжен с $\chi_i(g)$, если существует автомор-

физм $\varphi \in \Gamma$ такой, что $\chi_j(g) = \varphi[\chi_i(g)]$ для всех $g \in G$. Элемент $b \in G$ назовем K -сопряженным с $a \in G$, если $b = c^{-1}ac$, где $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^\mu$ — автоморфизм из Γ .

Соотношение K -сопряженности приводит к разбиению множества характеров (элементов G) на непересекающиеся подмножества; X_1, \dots, X_r (T_1, \dots, T_r) — K -отделы характеров (K -отделы группы). K -отделам характеров, в силу (4), соответствуют системы идемпотентов $E_1 = \{\bar{e}_{11}, \dots, \bar{e}_{1i_1}\}, \dots, E_r = \{\bar{e}_{r1}, \dots, \bar{e}_{ri_r}\}$, на которые распадается множество $E = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_t\}$.

Мы будем считать, что выполняются равенства

$$e_j = \sum_{k=1}^{i_j} \bar{e}_{jk} \quad (j = 1, \dots, r), \quad (5)$$

чего всегда можно добиться путем изменения нумерации идемпотентов.

Очевидно, $K(\chi_1(g_i), \dots, \chi_t(g_i)) = K(\chi_1(g_j), \dots, \chi_t(g_j))$, если g_i и g_j принадлежат одному K -отделу T_s ; $K(\chi_i(g_1), \dots, \chi_i(g_t)) = K(\chi_j(g_1), \dots, \chi_j(g_t))$ для характеров χ_i и χ_j из одного K -отдела X_k . Если $g_i \in T_s, \chi_i \in X_k$, то поля $K(\chi_1(g_i), \dots, \chi_t(g_i))$ и $K(\chi_i(g_1), \dots, \chi_i(g_t))$ обозначим, соответственно, K_s и K_k ($s = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r$).

Пусть $\varphi \in \Gamma$ задается формулой

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^\mu, \quad (\mu, h) = 1. \quad (6)$$

Условимся говорить, что характер $\chi_i(g)$ выдерживает автоморфизм φ , если $\chi_i(g) = \chi_i(g^\mu)$. Про класс C_i , порожденный элементом g , скажем, что он выдерживает автоморфизм φ , если $g^\mu \in C_i$.

Лемма 1 (4). Число характеров, выдерживающих автоморфизм φ , равно числу классов, выдерживающих этот автоморфизм*.

Лемма 2. Число классов, принадлежащих K -отделу T_i , равно степени поля K_i над K . Аналогично, число характеров из K -отдела X_i равно степени поля K_i над K ($i = 1, \dots, r$).

Лемма 3. Степень поля Z_i над K равна числу характеров K -отдела X_i ($i = 1, \dots, r$).

Предположим теперь, что G — p -группа и $p \neq 2$. В этом случае $K(\varepsilon)$ — циклическое поле. Пусть σ — образующий элемент Γ ; m — степень $K(\varepsilon)$ над K . Будем говорить, что характер $\chi_i(g)$ (класс C_i) принадлежит автоморфизму $\varphi \in \Gamma$, если все автоморфизмы $\psi \in \Gamma$, которые он выдерживает, являются степенями.

Так как Γ — циклическая группа, то каждый характер (класс) принадлежит некоторому автоморфизму σ^s , где s/m .

Чтобы найти автоморфизм, которому принадлежит характер $\chi_i(g)$ (класс C_i), достаточно взять образующий элемент циклической подгруппы группы Γ , соответствующей, в силу основной теоремы теории Галуа, полю $K(\chi_i(g_1), \dots, \chi_i(g_t))$ ($K(\chi_1(g_i), \dots, \chi_t(g_i))$).

Отсюда легко заключить, что характеры (классы) из одного K -отдела X_i (T_i) принадлежат одному и тому же автоморфизму $\varphi \in \Gamma$. Если характер $\chi_i(g)$ (класс C_i) принадлежит автоморфизму σ^s (s/m), то число характеров K -отдела характеров, содержащего χ_i (число классов K -отдела группы, в который входит C_i) равно $\frac{m}{s}$, так как с этим числом совпадает степень поля $K(\chi_i(g_1), \dots, \chi_i(g_t))$ ($K(\chi_1(g_i), \dots, \chi_t(g_i))$) над K (см. лемму 2).

* Более общее предположение доказано в (1).

Лемма 4. Число характеров, принадлежащих автоморфизму $\varphi \in \Gamma$, равно числу классов, принадлежащих этому автоморфизму.

Доказательство. Пусть $\varphi = \sigma^s$. Лемма, очевидно, справедлива, если $s = 1$. В самом деле, характеры и классы, выдерживающие σ , одновременно принадлежат этому автоморфизму, и остается использовать лемму 1. Предположим, что для $s \leq k < t - 1$ имеет место утверждение леммы. Характеры и классы, выдерживающие автоморфизм σ^{k+1} , принадлежат автоморфизмам σ^s , где s делит $k+1$.

Пусть s_1, \dots, s_q — все делители $k+1$, удовлетворяющие условию $1 \leq s_i < k+1$ ($i = 1, \dots, q$); $N^{(i)} (N_1^{(i)})$ — число характеров (классов), принадлежащих автоморфизму σ^{s_i} ; $N_{k+1} (N_{1, k+1})$ — число характеров (классов), принадлежащих σ^{k+1} ; $\bar{N} (\bar{N}_1)$ — число характеров (классов), выдерживающих автоморфизм σ^{k+1} .

$$\begin{aligned} \bar{N} &= N^{(1)} + \dots + N^{(q)} + N_{k+1}, \\ \bar{N}_1 &= N_1^{(1)} + \dots + N_1^{(q)} + N_{1, k+1}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 1, $\bar{N} = \bar{N}_1$ и, в силу предположения индукции, $N^{(s)} = N_1^{(s)}$ ($s = 1, \dots, q$). Значит, $N_{k+1} = N_{1, k+1}$. Лемма доказана.

Теорема 1. Центры групповых колец p -групп G и H ($p \neq 2$) над полем K изоморфны тогда и только тогда, когда между K -отделами G и H можно установить взаимно-однозначное соответствие, при котором соответствующие K -отделы G и H содержат одинаковое число классов.

Доказательство. Пусть T_{i_1}, \dots, T_{i_s} — все K -отделы G , содержащие k классов. Тогда все классы этих K -отделов принадлежат автоморфизму $\sigma^{m/k}$. Число характеров, принадлежащих этому автоморфизму, ввиду лемм 2 и 3, равно kl , где l — число полей Z_i степени k над K . В силу леммы 4, $ks = kl$, откуда $l = s$. Из этого равенства вытекает, что между K -отделами G и полями Z_i существует взаимно-однозначное соответствие, при котором степени полей Z_i ($i = 1, \dots, r$) равны числам классов, содержащихся в соответствующих K -отделах группы. Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что необходимым и достаточным условием изоморфизма подполей циклического поля над K является совпадение их степеней над K , и из двух полей $K(\varepsilon_1)$ и $K(\varepsilon_2)$, где ε_1 и ε_2 — корни степеней p^{m_1} и p^{m_2} из 1, одно всегда изоморфно подполю другого.

Теорема 1 неверна для групп порядка 2^m , что можно показать на примере рациональных групповых колец 16-го порядка, но остается в силе для абелевых p -групп при произвольном простом p . Таким образом, имеет место:

Теорема 2. Групповые кольца $R(G, K)$ и $R(H, K)$, где G и H — примарные абелевы группы, изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие K -отделы этих групп содержат одинаковое число элементов.

Вопрос об изоморфизме групповых колец произвольных абелевых групп сводится к такому же вопросу для соответствующих примарных компонент этих групп (5).

Выражаю глубокую благодарность чл.-корр. АН УССР Я. Б. Лопатинскому и доктору физико-математических наук И. Р. Шафаревичу за ряд ценных указаний.

Ужгородский государственный университет

Поступило
29 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Д. Адо, ДАН, 50 (1945). ² С. Д. Берман, ДАН, 86, № 5 (1952).
³ Б. Л. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, 1947. ⁴ G. Frobenius, I. Schur, Berliner Ber., 657 (1906). ⁵ S. Perlis, G. L. Walker, Trans. Am. Math. Soc., 68, № 3, 420 (1950).