

Б. И. АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

К ТЕОРИИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 V 1953)

Рассмотрим интегро-дифференциальную систему

$$\varphi^{(n)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \varphi^{(i)}(x) - \lambda \sum_{i=0}^m \int_a^b K_i(x, s) \varphi^{(i)}(s) ds = f(x),$$

$$\varphi(x)|_{x=x_0} = \varphi^{(1)}(x)|_{x=x_1} = \dots = \varphi^{(n-1)}(x)|_{x=x_{n-1}} = 0, \quad (1)$$

где $a_i(x)$, $K_i(x, s)$ и $f(x)$ — вообще говоря, комплекснозначные функции. При этом в случае $n \geq m$

$$\int_a^b |a_i(x)|^2 dx < \infty, \quad \int_a^b \int_a^b |K_i(x, s)|^2 dx ds < \infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty,$$

а в случае $n < m$ $a_i(x)$, $K_i(x, s)$ и $f(x)$ дифференцируемы по x $m - n$ раз и

$$\int_a^b \left| \frac{d^{(m-n)} [a_i(x)]}{dx^{(m-n)}} \right|^2 dx < \infty, \quad \int_a^b \int_a^b \left| \frac{d^{(m-n)} [K_i(x, s)]}{dx^{(m-n)}} \right|^2 dx ds < \infty,$$

$$\int_a^b \left| \frac{d^{(m-n)} [f(x)]}{dx^{(m-n)}} \right|^2 dx < \infty.$$

Предполагая, что x_0, x_1, \dots, x_{n-1} — произвольные точки $[a, b]$ и применяя особым образом конструируемый процесс многократного интегрирования по частям с использованием начальных условий, можно доказать следующую лемму.

Лемма. Система (1) эквивалентна в случае $n \geq m$ системе

$$\varphi^{(n)}(x) - \int_a^b Q(x, s) \varphi^{(n)}(s) ds - \lambda \int_a^b Q'(x, s) \varphi^{(n)}(s) ds = f(x),$$

$$\varphi(x)|_{x=x_0} = \varphi^{(1)}(x)|_{x=x_1} = \dots = \varphi^{(n-1)}(x)|_{x=x_{n-1}} = 0, \quad (2)$$

а в случае $n < m$ системе

$$\varphi^{(n)}(x) - \int_a^b Q(x, s) \varphi^{(n)}(s) ds - \lambda \sum_{j=0}^{m-n} \int_a^b Q'_j(x, s) \varphi^{(n+j)}(s) ds = f(x),$$

$$\varphi(x)|_{x=x_0} = \varphi^{(1)}(x)|_{x=x_1} = \dots = \varphi^{(n-1)}(x)|_{x=x_{n-1}} = 0. \quad (3)$$

При этом

$$Q(x, s) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i-1} a_i(x) Q_{i, n-i-1}(x, s);$$

$$Q'(x, s) = \sum_{i=0}^m (-1)^{n-i} Q'_{i, n-i}(x, s); \quad Q_0'(x, s) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} Q'_{i, n-i}(x, s);$$

$$Q'_j(x, s) = K_{n+j}(x, s); \quad j = 1, 2, \dots, m-n,$$

где $Q_{i, n-i-1}(x, s)$ — последний член последовательности

$$1) Q_{i,0}(x, s) = P_{1i}(x, s) + P_{2i}(x, s);$$

$$P_{1i}(x, s) = \begin{cases} 1, & x \in [a, x_i], \\ 0, & x \in [x_i, b]; \end{cases} \quad P_{2i}(x, s) = \begin{cases} 1, & s < x_i, \\ 0, & s \geq x_i; \end{cases}$$

$$2) Q_{i,1}(x, s) = \int_a^s Q_{i,0}(x, s) ds, \quad a \leq s \leq x_i; \quad \int_b^s Q_{i,0}(x, s) ds, \quad x_i < s \leq b; \dots;$$

$$(n-i) Q_{i, n-i-1}(x, s) = \begin{cases} \int_a^s Q_{i, n-i-2}(x, s) ds, & a \leq s \leq x_{n-1}, \\ \int_b^s Q_{i, n-i-2}(x, s) ds, & x_{n-1} < s \leq b, \end{cases}$$

$a Q'_{i, n-i}(x, s)$ — последний член последовательности

$$1) Q'_{i,0}(x, s) = K_i(x, s);$$

$$2) Q'_{i,1}(x, s) = \int_a^s Q'_{i,0}(x, s) ds, \quad a \leq s \leq x_i; \quad \int_b^s Q'_{i,0}(x, s) ds, \quad x_i < s \leq b; \dots;$$

$$n-i+1) Q'_{i, n-i}(x, s) = \begin{cases} \int_a^s Q'_{i, n-i-1}(x, s) ds, & a \leq s \leq x_{n-1}, \\ \int_b^s Q'_{i, n-i-1}(x, s) ds, & x_{n-1} < s \leq b. \end{cases}$$

Заметим, что если x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , вообще говоря, различные между собою, принадлежат концам $[a, b]$, то для $Q_{i, n-i-1}(x, s)$ и $Q'_{i, n-i}(x, s)$ можно получить более простые выражения, а именно:

$$Q_{i, n-i-1}(x, s) = \int_{(b+a)-x_{n-1}}^s \dots \int_{(b+a)-x_{i+1}}^s P_i(x, s) ds \dots ds;$$

$$Q'_{i, n-i}(x, s) = \int_{(b+a)-x_{n-1}}^s \dots \int_{(b+a)-x_i}^s K_i(x, s) ds \dots ds,$$

$$P_i(x, s) = \begin{cases} 1, & s \leq x \\ 0, & s > x \end{cases} \quad \text{при } x_i = a; \quad P_i(x, s) = \begin{cases} -1, & s \geq x \\ 0, & s < x \end{cases} \quad \text{при } x_i = b.$$

Замечание 1. Пусть система (1) эквивалентна уравнению

$$u(x) - \lambda Q[u(x)] = R(x) \quad (4)$$

в том смысле, что если $\varphi(x)$ — решение (1), то $u(x) = \varphi^{(n)}(x)$ — решение (4), и если $u(x)$ — решение (4), то $\varphi(x) = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_{n-1}}^x u(x) dx \dots dx$ — решение (1).

Условимся называть эквивалентность такого рода эквивалентностью в смысле замечания 1.

Определение 1. Назовем $\lambda = \lambda_0$ собственным значением (1), если при $\lambda = \lambda_0$ и при $f(x) = 0$ система (1) имеет ненулевые решения.

Определение 2. Назовем спектром системы (1) множество собственных значений (1) с учетом их кратности.

Определение 3. Назовем систему (1) неособенной, если она имеет по крайней мере одно несобственное значение.

Система (1) всегда неособенная, если $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1}$ (задача Коши), так как в этом случае $\lambda = 0$ — несобственное значение (1).

Покажем существование особых систем. Пусть при некоторых определенных начальных условиях и коэффициентах $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $Q(x, s)$ имеет собственное значение ν (это осуществимо), которому соответствуют собственные функции $\psi_i(x, \nu)$, $i = 1, \dots, p$, ядра $Q(x, s)$ и $\gamma_i(x, \nu)$, $i = 1, \dots, p$, ядра $Q(s, x)$. Тогда система

$$\varphi^{(n)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \nu a_i(x) \varphi^{(i)}(x) - \lambda \int_a^b A(x) B(s) \varphi^{(n)}(s) ds = f(x),$$

$$\varphi(x)|_{x=x_0} = \varphi^{(1)}(x)|_{x=x_1} = \dots = \varphi^{(n-1)}(x)|_{x=x_{n-1}} = 0 \quad (5)$$

особенная, если $A(x)$ ортогональна всем $\gamma_i(x, \nu)$, так как при $f(x) = 0$ система (5) эквивалентна в смысле замечания 1 уравнению

$$u(x) - \lambda \int_a^b \left[A(x) B(s) + \int_a^b T(x, t, \nu) A(t) B(s) dt \right] u(s) ds = \sum_{i=1}^p c_i \psi_i(x, \nu), \quad (6)$$

где $T(x, t, \nu)$ — обобщенная резольвента ядра $Q(x, s)$, а c_i — произвольные постоянные, имеющему при всяком λ ненулевые решения.

Заметим, что при $n \geq m$ неособенной (соответственно, особенной) системе (1) соответствует неособенное (соответственно, особенное), по терминологии З. И. Халилова (1), ядро $Q(x, s) - \lambda Q'(x, s)$. Пользуясь результатами З. И. Халилова (1), легко распространяемыми на уравнения вида

$$u(x) - \int_a^b Q(x, s) u(s) ds - \lambda \sum_{j=0}^{m-n} \int_a^b Q'_j(x, s) u^{(j)}(s) ds = f(x), \quad (7)$$

получим вывод: спектр (1) либо дискретное множество без точек сгущения на конечном расстоянии (неособенная задача), либо всякое значение λ принадлежит спектру (особенная задача).

Не нарушая общности, можно считать единицу собственным значением ядра $Q(x, s)$ тогда и только тогда, если система (1) особенная, так как сдвигом в плоскости λ (1) можно перейти от всякого неособенного ядра $Q(x, s) - \lambda Q'(x, s)$ к некоторому ядру $Q_1(x, s) - \lambda Q'_1(x, s)$, где $Q_1(x, s)$ не имеет собственного значения единица. Это легко распространить на уравнение (7). Пользуясь леммой, легко установить следующую теорему.

Теорема 1. Если система (1) неособенная, то она эквивалентна в смысле замечания 1 при $n \geq m$ уравнению

$$u(x) - \lambda \int_a^b \left[Q'(x, s) + \int_a^b R(x, t, 1) Q'(t, s) dt \right] u(s) ds =$$

$$= f(x) + \int_a^b R(x, t, 1) f(t) dt,$$

где $R(x, t, 1)$ — резольвента ядра $Q(x, s)$, а при $n < m$ уравнению

$$u(x) - \lambda \sum_{j=0}^{m-n} \int_a^b \left[Q'_j(x, s) + \int_a^b R(x, t, 1) Q'_j(t, s) dt \right] u^{(j)}(s) ds =$$

$$= f(x) + \int_a^b R(x, t, 1) f(t) dt.$$

В дальнейшем $T(x, s, 1)$ означает обобщенную резольвенту, а

$$\psi_i(x, 1), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (8)$$

линейно независимые собственные функции ядра $Q(x, s)$, соответствующие собственному значению единица. Очевидно, p равно числу линейно независимых решений (1) при $\lambda = 0$.

Теорема 2. Пусть система (1) особенная и $n \geq m$. Тогда при всяком λ среди функций системы (8) существуют такие функции $\psi_{r_i}^\lambda(x, 1)$, $i = 1, 2, \dots, q_\lambda$; $q_\lambda \leq p$, что система (1) при $f(x) = 0$ эквивалентна в смысле замечания 1 уравнению

$$u(x) - \lambda \int_a^b \left[Q'(x, s) + \int_a^b T(x, t, 1) Q'(t, s) dt \right] u(s) ds = \sum_{i=1}^{q_\lambda} c_i \psi_{r_i}^\lambda(x, 1), \quad (9)$$

где c_i , $i = 1, \dots, q_\lambda$, — произвольные постоянные. При этом если λ — собственное значение ядра уравнения (9), то $\psi_{r_i}^\lambda(x, 1)$, $i = 1, \dots, q_\lambda$, те и только те функции системы (8), которые удовлетворяют условиям

$$\int_a^b \left[Q'(x, s) + \int_a^b T(x, t, 1) Q'(t, s) dt \right] \psi_{r_i}^\lambda(s, 1) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q_\lambda.$$

В последнем случае, в частности, q_λ может быть равно нулю.

Теорема 3. Пусть система (1) особенная и $n < m$. Тогда при всяком λ среди функций системы (8) существуют такие функции $\psi_{r_i}^\lambda(x, 1)$, $i = 1, 2, \dots, q_\lambda$; $q_\lambda \leq p$, что система (1) при $f(x) = 0$ эквивалентна в смысле замечания 1 уравнению

$$u(x) - \lambda \sum_{j=0}^{m-n} \int_a^b \left[Q_j'(x, s) + \int_a^b T(x, t, 1) Q_j'(t, s) dt \right] u^{(j)}(s) ds = \sum_{i=1}^{q_\lambda} c_i \psi_{r_i}^\lambda(x, 1), \quad (10)$$

где c_i — произвольные постоянные. При этом, если λ таково, что однородное уравнение с левой частью (10) имеет нетривиальные решения, то $\psi_{r_i}^\lambda(x, 1)$, $i = 1, 2, \dots, q_\lambda$, те и только те функции системы (8), которые удовлетворяют условиям

$$\int_a^b \left[Q_j'(x, s) + \int_a^b T(x, t, 1) Q_j'(t, s) dt \right] \psi_{r_i}^\lambda(s, 1) ds = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-n, \\ i = 1, 2, \dots, q_\lambda.$$

В последнем случае, в частности, q_λ может быть равно нулю.

Заметим, что $q_0 = p$. Случай $q_\lambda < p$ имеет место, например, если в (5) $p > 1$, λ — несобственное значение ядра (6) и, кроме того,

$$\int_a^b B(x) \psi_1(x, v) dx = 0; \quad \int_a^b B(x) \psi_i(x, v) dx \neq 0, \quad i = 2, 3, \dots, p; \\ \int_a^b A(x) \tau_i(x, v) dx \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Ясно, что число линейно независимых решений однородной особенной системы (1) равно либо q_λ , если λ — несобственное значение ядер уравнений (9), (10), либо сумме q_λ и числа линейно независимых собственных функций ядер уравнений (9), (10).

Новосибирский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
17 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ З. И. Халилов, ДАН, 54, № 7 (1946).