Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

А. А. ДМИТРИЕВ

ПРОХОЖДЕНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПРЕПЯТСТВИЯ ПРИ ЧАСТИЧНОМ ОТРАЖЕНИИ С ЗАДАННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОТРАЖЕНИЯ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 13 III 1953)

Рассматриваемая задача была выдвинута В. В. Шулейкиным. Она представляет интерес и для анализа прохождения длинных морских волн над подводными грядами и в узостях каналов, и, возможно, при рассмотрении некоторых явлений в атмосфере.

Коэффициент отражения, в первом приближении пропорциональный отношению сечений в узости и при подходе к ней, предполагается заданным.

I. Отражение от одного препятствия. Пусть известно, что в направлении оси абсцисс распространяется волна с горизонтальной компонентой скорости

$$u_{11} = A \cos k\,(x - ct), \tag{1}$$

где $k = 2\pi / \lambda$, $c = \sqrt{gh} = \omega / k$, h — глубина жидкости.

В точке $x = L$ происходит частичное отражение с коэффициентом отражения α. Возникают отраженная волна и прошедшая.

1) Если за препятствием нет волн, распространяющихся из бесконечности в сторону отрицательных x, то при $x = L$ отраженная волна будет

$$u_{12} = -\alpha u_{11} = -\alpha A \cos k\,(L - ct), \tag{2}$$

прошедшая

$$u_{21} = (1 - \alpha)\, u_{11} = (1 - \alpha)\, A \cos k\,(L - ct). \tag{3}$$

Суммарные скорости перед препятствием и за ним окажутся равными, соответственно:

$$u_1 = A\,[\cos k\,(x - ct) - \alpha \cos k\,(2L - ct - x)], \tag{4}$$

$$u_2 = (1 - \alpha)\, A \cos k\,(x - ct). \tag{5}$$

Результат элементарен: при отсутствии отражения $(\alpha = 0)$ проходит вся волна, а при полном отражении $(\alpha = 1)$ у препятствия отсутствуют горизонтальные движения, получаются стоячие колебания перед стенкой.

2) Если предположить канал замкнутым (кольцевым), то следует положить скорости прямой и обратной волн, соответственно равные $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, связанными соотношениями

$$(1 - \alpha)\, u_2(0, t) = u_2(L, t) + \alpha u_1(L, t), \tag{6}$$

$$(1 - \alpha)\, u_1(L, t) = u_1(0, t) + \alpha u_2(0, t). \tag{7}$$

При этом перегородка находится в начале координат. Полная длина канала равна L. В частном случае отсутствия отражения ($\alpha = 0$) обе волны взаимно не зависят друг от друга. Каждая имеет периодичность, кратную L, так как $u_k(0,\ t) = u_k(L,\ t)$, где $k = 1, 2$. При $\alpha = 1$ $u_2(L,\ t) = -u_1(L,\ t)$ и $u_1(0,\ t) = -u_2(0,\ t)$, т. е. имеет место волна, полностью отражающаяся от стенки. Это может быть и стоячая волна, и бегущая то в одну, то в другую сторону канала. При $0 < \alpha < 1$ простейшим решением системы (6), (7) будет стоячая волна периодичности, кратной L, если положить $u_1(L,\ t) = -u_2(0, t)$, $u_1(0,\ t) = -u_2(L, t)$.

К образованию стоячих волн должна стремиться система волнения в замкнутом канале с частично отражающей перегородкой, если в начале там была возбуждена бегущая волна. Это можно показать методом индукции на частном случае. Пусть в начале имела место волна $A \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$ такая, что $\sin\omega\left(t - \frac{x}{c} + n\frac{L}{c}\right) = \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$, где $n = 1, 2, \ldots$ Тогда после первого отражения волны возникает частично отраженная с амплитудой αA и прошедшая, равная по амплитуде $(1 - \alpha)A$. Можно составить следующую таблицу для амплитуд прямой и обратной волн после определенного числа отражений (см. табл. 1).

Таблица 1

Амплитуда волны прошедшей и отраженной в зависимости от числа отражений

Число отражений	Момент времени	Амплитуда волны	
		прошедшей	обратной
0	0	A	0
1	L/c	$(1-\alpha)A$	$-\alpha A$
2	$2L/c$	$[(1-\alpha)^2 + \alpha^2]A$	$-2\alpha(1-\alpha)A$
3	$3L/c$	$[(1-\alpha)^3 + 3\alpha^2(1-\alpha)]A$	$-[3\alpha(1-\alpha)^2 + \alpha^3]A$
n	nL/c	$\left[(1-\alpha)^n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(1-\alpha)^{n-2}\alpha^2 + \ldots\right]A$	$-\left[\frac{n}{1}(1-\alpha)^{n-1}\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\alpha)^{n-3}\alpha^3 + \ldots\right]A$

В случае $\alpha = 0{,}5$ уже после первого отражения прямая и обратная волны делаются равными по амплитуде — возникают стоячие колебания. При $\alpha = {}^1/_3$ отношение амплитуды прямой волны к обратной составляет для $n = 1,\ 2,\ 3$, соответственно, ${}^2/_1$, ${}^5/_4$, ${}^{14}/_{13}$. Приведенные числа характеризуют довольно быстрый подход к конечному состоянию.

Для рассмотрения более общего случая волн в кольцевом канале можно воспользоваться операционным преобразованием

$$v(x, p) = p\int_0^\infty e^{-pt}\, u(x, t)\, dt.$$

Тогда при начальных условиях

$$\text{при } t = 0 \quad u = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right); \quad \frac{\partial u}{\partial t} = A\omega\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{8}$$

волновое уравнение в операционной форме будет

$$c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - p^2 v = p^2 A\ \sin\frac{\omega x}{c} - p\,A\omega\cos\frac{\omega x}{c}.$$

Его решение в операционной форме

$$v(x,p) = \frac{Ap}{\omega^2+p^2}\left[\omega\cos\frac{\omega x}{c} - p\sin\frac{\omega x}{c}\right] +$$

$$+\ \frac{[R_2-(R_1\alpha+R_2(1-\alpha))(e^{-pL/c}]e^{-px/c}+[R_1 e^{-pL/c}-(R_1(1-\alpha)+R_2\alpha)e^{-2pL/c}]e^{px/c}}{(1-e^{-pL/c})[1-(1-2\alpha)e^{-pL/c}]},$$

где

$$R_1 = -\alpha v_н(L,p),\quad R_2 = -v_н(0,p) + (1-\alpha)v_н(L,p), \tag{9}$$

$$v_н(x,p) = \frac{Ap}{\omega^2+p^2}\left[\omega\cos\frac{\omega x}{c} - p\sin\frac{\omega x}{c}\right]. \tag{10}$$

Развертывая знаменатель (9) в ряд и пользуясь обозначением (10), имеем:

$$v(x,p) = v_н(x,p) + R_2 e^{-p\frac{x}{c}} + R_1 e^{-\frac{p}{c}(L-x)} + \left[R_2\frac{1-(1-2\alpha)^2}{2\alpha} - (R_1\alpha + \right.$$

$$\left. + R_2(1-\alpha))\right]e^{-\frac{p}{c}(x+L)} + \left[R_1\frac{1-(1-2\alpha)^2}{2\alpha} - (R_1(1-\alpha)+R_2\alpha)\right]e^{-\frac{p}{c}(2L-x)} +$$

$$+\left[R_2\frac{1-(1-2\alpha)^3}{2\alpha} - (R_1\alpha + R_2(1-\alpha))\frac{1-(1-2\alpha)^2}{2\alpha}\right]e^{-\frac{p}{c}(2L+x)} + \ldots \tag{11}$$

Это изображение соответствует оригиналу с последовательно включающимися, появляющимися с определенных моментов времени, членами:

$$u(x,t) = A\left\{\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\eta(t) + \left[(1-\alpha)\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}-\frac{L}{c}\right) - \right.\right.$$

$$\left. -\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\eta\left(t-\frac{x}{c}\right) + \left[-\alpha\sin\omega\left(t+\frac{x}{c}-\frac{2L}{c}\right)\right]\eta\left(t-\frac{L-x}{c}\right) +$$

$$+\left[((1-\alpha)^2+\alpha^2)\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}-\frac{2L}{c}\right) - \right.$$

$$\left. -(1-\alpha)\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}-\frac{L}{c}\right)\right]\eta\left(t-\frac{L+x}{c}\right) + \left[\alpha\sin\omega\left(t-\frac{2L-x}{c}\right) - \right.$$

$$\left.\left. -2\alpha(1-\alpha)\sin\omega\left(t+\frac{x}{c}-\frac{3L}{c}\right)\right]\eta\left(t-\frac{2L-x}{c}\right) + \ldots\right\}, \tag{12}$$

где

$$\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t<\tau, \\ 1 & \text{при } \tau<t. \end{cases} \tag{13}$$

Для уяснения физического смысла членов выражения (12), рассмотрим колебания в точке $x=(L-\varepsilon)/2$. Пока не добежала из начала координат крайняя точка начальной волны, колебание описывается первым членом. С момента времени $t=(L-\varepsilon)/2c$ начинает действовать прошедшая за перегородку волны $(1-\alpha)\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}-\frac{L}{c}\right)$. Еще через ε/c добегает отраженная от стенки волна $-\alpha\sin\omega\left(t+\frac{x}{c}-\frac{2L}{c}\right)$, которая начинает действовать с момента $t=(L+\varepsilon)/2c$, и т. д. Для моментов времени $t=0, L/c, 2L/c$ выражение (12) дает коэффициенты, приведенные, соответственно, в 1-й, 2-й, 3-й строках табл. 1.

II. Отражение от двух препятствий, находящихся на расстояниях L и $2L$ от начала координат. Пусть коэффициент отражения от каждого препятствия в отдельности будет α. Известна прямая волна, подходящая к первому препятствию

$$u_{01} = A\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right). \tag{14}$$

За вторым препятствием отсутствует обратная волна ($u_{22}=0$). Ищутся отраженная волна перед первым препятствием u_{02}, прошедшая за второе препятствие u_{21} и прямая и обратная волны u_{11}, u_{12} между препятствиями.

Граничные условия, по аналогии с (2), (3), (6), (7), можно написать в виде:

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\, u_{01}(L, t) &= u_{11}(L, t) + \alpha u_{12}(L, t); \\ -\alpha u_{01}(L, t) &= u_{02}(L, t) - (1-\alpha)\, u_{12}(L, t); \\ 0 &= (1-\alpha)\, u_{11}(2L, t) - u_{21}(2L, t); \\ 0 &= \alpha u_{11}(2L, t) + u_{12}(2L, t). \end{aligned} \tag{15}$$

Решение удобно искать в форме $\overline{u}_{j1} = A_j e^{i(\omega t - kx)}$; $\overline{u}_{j2} = B_j e^{i(\omega t + kx)}$, где $j = 0, 1, 2$, причем следует брать мнимую часть.

Отраженная волна перед первым препятствием оказывается состоящей из суммы двух волн

$$u_{02}(x, t) = -\alpha A \left\{\left[1 - \frac{\alpha^2 (1-\alpha)^2}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2kL}\right] \sin(\omega t + kx - 2kL) + \right. \\ \left. + \frac{(1-\alpha)^2 \sin(\omega t + kx - 4kL)}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2kL}\right\}, \tag{16}$$

обязанных одна отражениям от первой стенки, а другая — от второй. Коэффициент отражения от всей системы в общем виде недостаточно нагляден, а в случае расстояния между препятствиями, кратного полуволне, $L = n\lambda/2$, он оказывается равным

$$r = \left|\frac{u_{02\,\text{макс}}}{A}\right| = \frac{2\alpha}{1+\alpha}. \tag{17}$$

Между обоими препятствиями движение можно представить в виде суммы стоячей и бегущей волн:

$$\frac{u_{12} + u_{21}}{A} = \frac{1-\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2kL}} \{2\alpha \cos(\omega t - 2kL - \varphi) \sin(2kL - kx) + \\ + (1-\alpha) \sin(\omega t - kx - \varphi)\}, \tag{18}$$

где $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\alpha^2 \sin 2kL}{1 - \alpha^2 \cos 2kL}$.

Если $\alpha > {}^1/_2$, то амплитуда стоячей волны между препятствиями превышает амплитуду бегущей.

За оба препятствия проходит волна

$$u_{21} = A \frac{(1-\alpha)^2}{\sqrt{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2kL}} \sin\left(\omega t - kx - \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha^2 \sin 2kL}{1 - \alpha^2 \cos 2kL}\right). \tag{19}$$

Коэффициент пропускания, равный

$$p = \frac{(1-\alpha)^2}{\sqrt{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2kL}}, \tag{20}$$

может изменяться в зависимости от соотношения между длиной волны λ и расстоянием L в пределах $\dfrac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha^2} < p < \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$. Левый предел соответствует $L = (2n+1)\dfrac{\lambda}{4}$, а правый $L = n\dfrac{\lambda}{2}$.

Следует отметить, что в реальных условиях диссипация энергии должна уменьшать в первую очередь величину коэффициента пропускания. Для случая кольцевого канала при малых значениях коэффициента отражения влияние вязкости может оказаться более заметным, чем эффект отражений.

Поступило
7 III 1953