

Л. А. ЧУДОВ

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ЛИНИИ РЕШЕНИЙ
ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 2 IV 1953)

Известно, что изолированные особые точки могут быть не только у решений линейных уравнений эллиптического типа с гладкими коэффициентами, но также у решений уравнений других типов, в частности гиперболических (1). Представляют интерес свойства, характеризующие изолированные особые точки решений эллиптических уравнений.

Определение. Точка (x_0, y_0, z_0) называется изолированной особой точкой ограниченного вида для решения $u(x, y, z)$ уравнения

$$\sum_{0 \leq i+j+h \leq n} A_{ijk} \frac{\partial^{i+j+h} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^h} = F(x, y, z), \quad (1)$$

если: 1) в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , исключая лишь эту точку, функция $u(x, y, z)$ имеет непрерывные производные до порядка L включительно ($L \geq n$); 2) в этой окрестности функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (1); 3) для всех производных порядка $n-1$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) справедлива оценка $\left| \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \right| < \frac{A}{r^p}$, где A и p — положительные постоянные, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$; 4) либо сама функция $u(x, y, z)$ либо некоторая ее производная порядка не выше n имеет в точке (x_0, y_0, z_0) неустранимый разрыв.

Если алгебраическая форма

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \sum_{i+j+k=n} A_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \quad (2)$$

соответствующая уравнению (1), не имеет особых точек в комплексной области, т. е. уравнения

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0 \quad (3)$$

не имеют решения, отличного от тривиального $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то уравнение мы будем называть невырожденным.

Теорема 1. *Невырожденное линейное однородное уравнение*

$$\sum_{i+j+h=n} a_{ijk} \frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = 0 \quad (4)$$

с постоянными коэффициентами имеет решение с изолированной особой точкой ограниченного вида при $L \geq n + 3$ только в том случае, если уравнение (4) является эллиптическим.

Имеется пример, показывающий, что минимальный порядок гладкости L , исключающий возможность существования изолированной особой точки ограниченного вида у решения неэллиптического уравнения, удовлетворяющего условиям теоремы 1, не ниже $n + 1$.

При доказательстве теоремы 1 использованы фундаментальные

решения, построенные для невырожденных уравнений с постоянными коэффициентами в работе (2).

Теорема 1 может быть применена к изучению вопроса о возможных направлениях в пространстве (x, y, z, t) изолированной особой линии решения $u(x, y, z, t)$ линейного уравнения

$$\sum_{0 \leq i+j+k+l \leq n} A_{ijkl} \frac{\partial^{i+j+k+l} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \partial t^l} = F(x, y, z, t) \quad (5)$$

с переменными непрерывными коэффициентами. Этот вопрос, очевидно, равносильно определению возможных скоростей распространения изолированных точечных разрывов в пространстве (x, y, z) .

Предполагая изолированную особую линию достаточно гладкой, можно ее малый отрезок соответствующим преобразованием координат перевести в отрезок прямой, в частности, в отрезок оси t . Допустим, что указанное преобразование координат уже выполнено. Изолированную особенность, расположенную на оси t , мы будем называть приводимой к однородной, если существует такое $N > 0$, что функция $\varepsilon^N u(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, вместе с производными до порядка n включительно сходится к n -гладкой при $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ функции $v(x, y, z, t)$, отличной от тождественного нуля.

С помощью преобразования подобия можно получить следующий результат: для того чтобы на оси t в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$ могла быть расположена приводимая к однородной изолированная особенность решения уравнения (5), необходимо, чтобы для некоторого решения уравнения

$$\sum_{i+j+k=n} A_{ijk0} (0, 0, 0, 0) \frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = 0 \quad (6)$$

(именно, для введенной выше функции $v(x, y, z, t)$ при $t = 0$) начало координат в пространстве (x, y, z) являлось изолированной особой точкой ограниченного вида. Так как уравнение (6) является однородным, имеет постоянные коэффициенты и содержит три независимых переменных, то к нему может быть применена теорема 1, что позволяет доказать следующее предложение.

Теорема 2. *Направление, характеризуемое вектором (x, y, z, t) , может быть в точке $(0, 0, 0, 0)$ носителем изолированной линейной особенности, приводимой к однородной, для решения невырожденного уравнения вида (5) только в том случае, если плоскость $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$ в вещественном пространстве $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ либо не пересекает конуса*

$$\sum_{i+j+k+l=n} A_{ijkl} (0, 0, 0, 0) \alpha^i \beta^j \gamma^k \delta^l = 0$$

в точках, отличных от начала координат, либо же касается этого конуса.

Отметим некоторые следствия, вытекающие из теоремы 2. В случае гиперболического уравнения произвольного четного порядка изолированная особая линия рассматриваемого типа не может проходить вне внешней полости характеристического коноида; из невырожденных уравнений второго порядка только эллиптические и гиперболические могут иметь решения с изолированными линейными особенностями, приводимыми к однородным.

Выражаю глубокую благодарность акад. И. Г. Петровскому, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Поступило
7 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950, стр. 161. ² N. Zeilon, Ark. f. Mat., Astr. och Fys., 9, No. 18 (1913).