Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 4

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

К ТЕОРИИ КОНСТРУИРОВАНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 IV 1953)

Отправляясь от формулы

$$y(a+ht_\beta)=\sum_{k=0}^{n-1}(t_\beta-t_\alpha)^k\frac{h^k}{k!}y^{(k)}(a+ht_\alpha)+$$

$$+\frac{h^n}{(n-1)!}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}(t_\beta-t)^{n-1}y^{(n)}(a+th)\,dt, \tag{1}$$

где t_α, t_β, h и n — произвольные числа, мы указали ([1-4]) пути конструирования интерполяционных формул с разностями от функции $y^{(n)}(x)$ одного вида.

Настоящее исследование предпринято с целью конструирования интерполяционных формул с разностями различных видов. Если $y^{(n)}(a+th)$ — любая непрерывная в замкнутом конечном промежутке $t_\alpha\leqslant t\leqslant t_\beta$ функция, то эти формулы можно вывести, конструируя предварительно многочлены (содержащие разности различных видов), приближающие $y^{(n)}(a+th)$ на $[t_\alpha, t_\beta]$.

Мы получим интересующие нас интерполяционные формулы из равенства (1), если:

1. Для фиксированной системы значений t_α и t_β варьировать интерполяционные многочлены, связанные с функцией $y^{(n)}(x)$ и совокупностью интерполяционных узлов.

2. Разложить $y^{(n)}(a+th)$ с помощью какой-нибудь из интерполяционных формул и варьировать значения параметров t_α и t_β.

3. Видоизменять многочлены, аппроксимирующие $y^{(n)}(a+th)$, путем изменения порядка заданных узлов.

4. Значения, приписываемые t_β, сделать зависимыми от значений, приписываемых t_α.

5. Заменить интегральный член равенства (1) конечной суммой с помощью той или иной квадратурной формулы.

С помощью этих путей, выбирая соответствующим образом интерполяционные многочлены для аппроксимации $f^{(n)}(a+th)$, можно построить многообразия интерполяционных формул, имеющих не только общие свойства, но и общее происхождение.

Разложим $y^{(n)}(x)=f(x)$ по разностям $f(a)$, $\nabla f(a),\ldots,\nabla^p f(a)=\Delta^p f(a-ph)$, $\Delta^{p+1}f(a-ph)$, $\Delta^{p+2}f(a-ph),\ldots$, одни из которых лежат на диагонали, выходящей из $f(a)$, идущей снизу вверх, другие же — на диагонали, идущей от разности $\Delta^p f(a-ph)$ сверху вниз.

Обращаясь к формуле Ньютона с разделенными разностями, мы убеждаемся, что в этом случае

$$f(a+th)=f(a)+\sum_{\rho=1}^{p}\frac{\nabla^{\rho}f(a)}{\rho!}\prod_{\sigma=0}^{\rho-1}(t+\sigma)+\sum_{\rho=p+1}^{r}\frac{\Delta^{\rho}f(a-ph)}{\rho!}\prod_{\sigma=p+1-\rho}^{p}(t+\sigma)+$$
$$+\frac{h^{r+1}f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}\prod_{\sigma=p-r}^{p}(t+\sigma). \tag{2}$$

Рассмотрим теперь ломаную, одно звено которой (горизонтальное) соединяет количества $f(a)$ и $\Delta^{2p}f(a-ph)$, другое же (диагональное) $\Delta^{2p}f(a-ph)$ с $\Delta^{r}f[a-(r-p)h]$ $(r\geqslant 2p+1)$. Используя, кроме разностей, лежащих на этой ломаной, средние арифметические разностей, стоящих в таблице непосредственно ниже и выше горизонтального звена, и интерполяционную формулу Ньютона с разделенными разностями, получим:

$$f(a+th)=f(a)+\sum_{\rho=1}^{p}\left\{\frac{\mu\delta^{2\rho-1}f(a)}{(2\rho-1)!}\,t\prod_{\sigma=1}^{\rho-1}(t^2-\sigma^2)+\frac{\delta^{2\rho}f(a)}{(2\rho)!}\,t^2\prod_{\sigma=1}^{\rho-1}(t^2-\sigma^2)\right\}+$$
$$+t\prod_{\sigma=1}^{p}(t^2-\sigma^2)\sum_{\rho=2p+1}^{r}\frac{\nabla^{\rho}f(a+ph)}{\rho!}\sum_{\sigma=p+1}^{\rho-p-1}(t+\sigma)+$$
$$+t\prod_{\sigma=1}^{p}(t^2-\sigma^2)\prod_{\sigma=p+1}^{r-p}(t+\sigma)\,h^{r+1}\frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}, \tag{3}$$

где при $\rho=1$ и $\rho=2p+1$ соответствующие произведения $\prod\limits_{\sigma=1}^{0}$ и $\prod\limits_{\sigma=p+1}^{p}$ принимаются равными 1.

Таким же образом можно построить с помощью интерполяционной формулы Ньютона с разделенными разностями большое число новых формул, выраженных через различные разности, лежащие на горизонтальных и диагональных линиях, образующих связную ломаную, получаемую последовательным движением по таблице разностей от $f(a)$ вправо.

Мы получим ряд новых формул, используя равенство (1) и только что построенные интерполяционные формулы. Так, полагая в формуле (2) $f(a+th)\equiv y^{(n)}(a+th)$ и подставив полученное разложение в (1), находим:

$$y(a+ht_\beta)=\sum_{k=0}^{n-1}(t_\beta-t_\alpha)^k\frac{h^k}{k!}y^{(k)}(a+ht_\alpha)+h^n\sum_{\rho=0}^{p}\alpha_{n,\rho}\nabla^{\rho}y^{(n)}(a)+$$
$$+h^n\sum_{\rho=p+1}^{r}\alpha'_{n,\rho}\Delta^{\rho}f(a-ph)+R_{n,r}, \tag{4}$$

где

$$\alpha_{n,\rho}=\frac{1}{(n-1)!\,\rho!}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}(t_\beta-t)^{n-1}\prod_{\sigma=0}^{\rho-1}(t+\sigma)\,dt\quad(\rho=0,1,\ldots,p),$$

$$\alpha'_{n,\rho}=\frac{1}{(n-1)!\,\rho!}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}(t_\beta-t)^{n-1}\prod_{\sigma=p+1-\rho}^{p}(t+\sigma)\,dt\quad(\rho=p+1,p+2,\ldots,r),$$

$$R_{n,r}=\frac{h^{n+r+1}}{(n-1)!\,(r+1)!}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}y^{(n+r+1)}(\xi)\,(t_\beta-t)^{n-1}\prod_{\sigma=p-r}^{p}(t+\sigma)\,dt.$$

При $n=2,\ p=2,\ r=5,\ t_\alpha=0$ и $t_\beta=1$ из формулы (4), в частности, получаем:

$$y(a+h)=y(a)+hy'(a)+\frac{h^2}{2}\Big[y''(a)+\frac{1}{3}\nabla y''(a)+\frac{1}{4}\nabla^2 y''(a)+$$
$$+\frac{19}{90}\Delta^3 y''(a-2h)-\frac{17}{720}\Delta^4 y''(a-2h)+\frac{37}{5040}\Delta^5 y''(a-2h)\Big]-\frac{191}{120960}h^8 y^{(8)}(\xi).$$

Используя равенство (1) и формулу (3), мы получим новую формулу, которая при $n=1,\ p=1,\ t_\alpha=-1,\ t_\beta=1$ приводит к квадратурной формуле:

$$\int_{-1}^{+1} f(a+th)\,dt=2f(a)+\frac{1}{3}\delta^2 f(a)-\frac{1}{90}\nabla^4 f(a+h)-\frac{1}{90}\nabla^5 f(a+h)+\cdots$$

Построенные выше формулы (2) и (3) могут быть использованы для численного дифференцирования. Так, из интерполяционной формулы (2) получаем формулу:

$$h^k f^{(k)}(a+th)=\sum_{\rho=k}^{p}\frac{\nabla^\rho f(a)}{\rho!}\frac{d^k}{dt^k}\prod_{\sigma=0}^{\rho-1}(t+\sigma)+$$
$$+\sum_{\rho=p+1}^{r}\frac{\Delta^\rho f(a-ph)}{\rho!}\frac{d^k}{dt^k}\prod_{\sigma=p+1-\rho}^{p}(t+\sigma)+\frac{h^{r+1}f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}\frac{d^k}{dt^k}\prod_{\sigma=p-r}^{p}(t+\sigma), \tag{5}$$

остаточный член которой упрощен на основании рассуждений, аналогичных рассуждениям, проведенным в § 1 работы автора ([4]). Формула (5) содержит, в частности, формулу численного дифференцирования А. А. Маркова ([5]).

Из формулы (5) мы получим простую формулу для вычисления первой производной в точке $x=a$:

$$hf'(a)=\sum_{\rho=1}^{p}\frac{\nabla^\rho f(a)}{\rho}+\sum_{\rho=p+1}^{r}\frac{(-1)^{\rho+p+1}}{(\rho-p)\binom{\rho}{p}}\Delta^\rho f(a-ph)+\frac{(-1)^{r+p}}{(r+1)\binom{r}{p}}h^{r+1}f^{(r+1)}(\xi).$$

Если продифференцировать формулу (3) четное число раз и положить $t=0$, мы придем к формуле численного дифференцирования, содержащей центральные разности $\delta^{2\rho} f(a)$ и восходящие разности $\nabla^\rho f(a+ph)$. Дифференцируя ту же формулу нечетное число раз и полагая $t=0$, получим формулу, содержащую полусумму разностей $\mu\delta^{2\rho-1} f(a)$ и восходящие разности $\nabla^\rho f(a+ph)$. Из этих формул мы находим простые формулы для вычисления первых двух производных:

$$hf'(a)=\sum_{\rho=1}^{p}(-1)^{\rho-1}\frac{[(\rho-1)!]^2}{(2\rho-1)!}\mu\delta^{2\rho-1}f(a)+$$
$$+\sum_{\rho=2p+1}^{r}(-1)^p\frac{\nabla^\rho f(a+ph)}{(\rho-p)\binom{\rho}{p}}+\frac{(-1)^p h^{r+1}}{(r+1)\binom{r}{p}}f^{(r+1)}(\xi),$$

$$h^2 f''(a)=\sum_{\rho=1}^{p}(-1)^{\rho-1}\frac{2[(\rho-1)!]^2}{(2\rho)!}\delta^{2\rho}f(a)+$$
$$+2\sum_{\rho=2p+2}^{r}(-1)^p\frac{\nabla^\rho f(a+ph)}{(\rho-p)\binom{\rho}{p}}\sum_{\sigma=p+1}^{\rho-p-1}\frac{1}{\sigma}+(-1)^p\frac{2h^{r+1}f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)\binom{r}{p}}\sum_{\sigma=p+1}^{r-p}\frac{1}{\sigma}.$$

В последнее время конструированием общих интерполяционных формул занимался Коллатц ([6,7]). В основу конструирования им положен метод, идентичный с нашим ([1]). Поэтому формулы, построенные Коллатцем, не являются новыми. Так, общая формула (1.45), приведенная на стр. 15 монографии Коллатца ([7]), получается из (1) (а следовательно, получается и из формул, выведенных автором в работах ([1,4])), если принять в ней $a = x_0$, $t_\alpha = -1$, $t_\beta = 0$, разложить $y^{(n)}(a + th) \equiv f$ с помощью формулы Ньютона с восходящими разностями и привести n-кратную квадратуру Коллатца к одной с помощью формулы Дирихле. Другие из общих формул, как, например, формулы (1.34), (1.37) и (1.54), приведенные на стр. 12, 13 и 16 монографии Коллатца ([7]), совпадают, соответственно, с формулами (7), (11) и (19) автора ([1]), прореферированными Коллатцем в ([8]) в качестве новых формул, принадлежащих автору настоящей статьи.

Тбилисский математический институт
Академии наук Грузинской ССР

Поступило
28 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Е. Микеладзе, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5—6 (1939). [2] Ш. Е. Микеладзе, Сообщ. АН Груз. ССР, 3, № 10, 1001 (1942). [3] Ш. Е. Микеладзе, ДАН, 61, № 5 (1948). [4] Ш. Е. Микеладзе, Усп. матем. наук, 3, 6 (1948). [5] А. Марков, Исчисление конечных разностей, 1910, стр. 29. [6] L. Collatz, Z. angew. Math. u. Mech., 29, 7/8 (1949). [7] L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 1951. [8] L. Collatz, Zbl. Math., 24, 6, 269 (1941).