Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 4

МАТЕМАТИКА

Любомир ИЛИЕВ

РЯДЫ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ФАБЕРА, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРЫХ ПРИНИМАЮТ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ЗНАЧЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 9 IV 1953)

Пусть K — ограниченный континуум, содержащий более одной точки, и G_∞ — та из смежных с ним областей, которой принадлежит точка $z=\infty$. Отобразим конформно G_∞ на внешность круга $|w|\leqslant\rho$ посредством функции $w=\Phi(z)$, которая удовлетворяет условиям:

$$\Phi(\infty)=\infty,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=1.$$

Тогда функция $\Phi(z)$ имеет вид:

$$\Phi(z)=z+\beta_0+\frac{\beta_1}{z}+\ldots \tag{1}$$

Многочлены Фабера $\Phi_n(z)$ $n=1,2,\ldots$, определяются равенством

$$[\Phi(z)]^n=\Phi_n(z)+\frac{\beta_1^{(n)}}{z}+\ldots \tag{2}$$

Обозначим через C_R кривую, которая посредством отображения $w=\Phi(z)$ переходит в окружность $|w|=R$. Ряд по многочленам Фабера

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z),\quad \Phi_0(z)=1, \tag{a}$$

для которого

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R_0}<\frac{1}{\rho}, \tag{R_0}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри области, ограниченной кривой C_{R_0}, и расходится во внешности кривой C_{R_0}. Справедливо и обратное предложение: каждая функция, аналитическая внутри C_{R_0}, может быть представлена в этой области в виде суммы ряда вида (a) (см. [1], стр. 418—423).

В настоящем сообщении мы докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если коэффициенты ряда*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Phi_n(z) \tag{c}$$

принимают конечное число различных значений $d_1, d_2, \ldots, d_s$, $s>1$, то кривая C_1 (при $\rho<1$) является естественной границей функции $f(z)$, если значения членов последовательности c_n, $n=0,1,2,\ldots$, после каждого индекса следуют непериодически.

Прежде чем доказать теорему, заметим, что из нее вытекают следующие частные случаи:

1) Если континуум K есть круг $|z| \leqslant r_0$, то $\Phi_n(z) = z^n$. В этом случае из теоремы 1 получается теорема Сеге ([2]) для степенных рядов. Действительно, если значения коэффициентов ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ после некоторого индекса повторяются периодически, то он представляет собой рациональную функцию.

2) Многочлены Фабера для интервала $-1 \leqslant x \leqslant 1$ суть многочлены Чебышева $T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos z$, причем $\rho = {}^1/_2$. Кривая C_1 в данном случае является эллипсом

$$\frac{4x^2}{5} + \frac{4y^2}{3} = 1. \tag{3}$$

Из теоремы 1 получаем:

Если коэффициенты ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(z),$$

где $T_n(z)$ обозначает n-й многочлен Чебышева, принимают конечное число значений, то эллипс (3) является естественной границей функции $f(z)$, если значения коэффициентов после каждого индекса следуют непериодически.

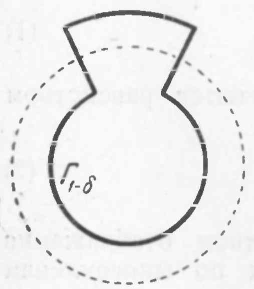

Рис. 1

Доказательство теоремы 1. В плоскости w обозначим через $\Gamma_{1-\delta}$ кривую, составленную из двух дуг окружностей, соответственно, с радиусами $1-\delta < 1$ и $R > 1$ и из частей радиусов, соединяющих эти дуги. Через $\overline{C}_{1-\delta}$ обозначим кривую в плоскости z, образом которой при отображении $w = \Phi(z)$ является кривая $\Gamma_{1-\delta}$ (см. рис. 1).

Вспомогательная теорема 1. *Если функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z), \tag{4}$$

для которой $|c_n| < C$, где C не зависит от n, регулярна внутри и на кривой $\overline{C}_{1-\delta}$ и если

$$s_n(z) = c_0 + c_1\Phi_1(z) + \ldots + c_n\Phi_n(z), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

то существует индекс N и не зависящая от n и z постоянная M такие, что на кривой $\overline{C}_{1-\delta}$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{f(z) - s_{n-1}(z)}{[\Phi(z)]^{n+1}} \right| < M, \tag{6}$$

если $n > N$.

Пусть $R_0' = 1 - \delta$, $R' = 1 - \delta'$, $\rho < r < R_0' \leqslant R'$. Как известно ([1]), в G_∞ на кривой $C_{R'}$ и вне ее имеем:

$$\Phi_n(z) = [\Phi(z)]^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta.$$

Отсюда на $\overline{C}_{1-\delta'}$ находим

$$|\Phi_n(z)| \leqslant |\Phi(z)|^n + \frac{L_r}{2\pi\delta_{r,R'}} r^n \leqslant |\Phi(z)|^n + \frac{L_r}{2\pi\delta_{r,R_0'}} r^n, \tag{7}$$

где L_r есть длина C_r, а $\delta_{r,R'}$, соответственно $\delta_{r,R_0'}$, есть расстояние между C_r и $C_{R'}$, соответственно C_r и $C_{R_0'}$. Так как на $\overline{C}_{1-\delta}$ имеем $|\Phi(z)|>r$, то из (7) видно, что существует индекс N такой, что при $n>N$ и произвольном $R'\geqslant R_0'$ для любого z на $\overline{C}_{1-\delta}$ выполнено неравенство

$$|\Phi_n(z)|\leqslant {}^3/_2\,|\Phi(z)|^n. \tag{8}$$

Выберем $\overline{C}_{1-\delta'}$, $\delta'<\delta$, так, чтобы она всецело содержала внутри себя кривую $\overline{C}_{1-\delta}$, но одновременно была настолько близка к $\overline{C}_{1-\delta}$, чтобы $f(z)$ из (4) оставалась бы и на $\overline{C}_{1-\delta'}$ регулярной. Тогда и кривая $\Gamma_{1-\delta'}$ будет содержать внутри себя кривую $\Gamma_{1-\delta}$. Пусть $w_1=\Phi(z_1)$, $w_2=\Phi(z_2)$ обозначают точки, в которых $\Gamma_{1-\delta'}$ пересекает окружность $|w|=1$.

Для того чтобы установить (6), достаточно доказать, что существует число M_1, не зависящее от z и $n>N$, для которого выполнено неравенство

$$|\Delta_n(z)|=\left|\frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{[\Phi(z)]^n}\,(\Phi(z)-\Phi(z_1))\,(\Phi(z)-\Phi(z_2))\right|<M_1$$

для всех z кривой $\overline{C}_{1-\delta'}$, если $n>N$.

Пусть $n>N$. На дуге кривой $\overline{C}_{1-\delta'}$, лежащей в области, соответствующей кругу $|w|<1$, получаем, принимая во внимание (8):

$$|\Delta_n(z)|\leqslant {}^3/_2\,C\,(1+|\Phi(z)|+|\Phi(z)|^2+\ldots)\,|\Phi(z)-\Phi(z_1)|\,|\Phi(z)-\Phi(z_2)|\leqslant$$

$$\leqslant {}^3/_2\,C\,\frac{|\Phi(z)-\Phi(z_1)|\,|\Phi(z)-\Phi(z_2)|}{1-|\Phi(z)|}.$$

Из этого неравенства в рассматриваемой области получаем:

1) На дуге кривой $\overline{C}_{1-\delta'}$, соответствующей дуге $|w|=1-\delta'$, так как $|w|=|\Phi(z)|$, находим $|\Delta_n(z)|\leqslant {}^3/_2\,C\,\frac{4}{\delta'}$.

2) На прообразе дуги, проходящей, например, через $\Phi(z_1)$, принимая во внимание, что $|\Phi(z)-\Phi(z_1)|=1-|\Phi(z)|$, находим $|\Delta_n(z)|\leqslant 3C$. Для области вне C_1 существует некоторое число $S>0$ такое, что на $\overline{C}_{1-\delta'}$ имеем $|f(z)|<S$. С другой стороны, из (7) при постоянном $r<R_0<1$ получаем для любого n (т. е. и для $n\leqslant N$):

$$|\Phi_n(z)|<|\Phi(z)|^n+\frac{L_r}{2\pi\delta_{r,R_0'}}\,r^n=|\Phi(z)|^n+Ar^n,$$

где A не зависит от n и z.

Ввиду этого на $\overline{C}_{1-\delta'}$ и вне C_1 получаем

$$|f(z)-s_{n-1}(z)|<S+C\,\frac{|\Phi(z)|^n}{|\Phi(z)|-1}+\frac{AC}{1-r}.$$

Если $\overline{R}'$ есть радиус большой окружности кривой $\Gamma_{1-\delta'}$, то на тех частях кривой $\overline{C}_{1-\delta'}$, которые лежат вне C_1 и которые соответствуют прямолинейным отрезкам кривой $\Gamma_{1-\delta'}$, находим:

$$|\Delta_n(z)|<\frac{P\,(|\Phi(z)|-1)\,2\,|\Phi(z)|}{|\Phi(z)|^n}+C\,\frac{(|\Phi(z)|-1)\;2\,|\Phi(z)|}{|\Phi(z)|-1}<$$

$$<P\,2\,\overline{R}'\,(\overline{R}'-1)+2C\overline{R}',\quad \text{где } P=S+\frac{AC}{1-r}.$$

Наконец, на прообразе окружности $|w|=\overline{R}'$ имеем

$$|\Delta_n(z)|<\left(\frac{P}{\overline{R}'^{\,n}}+\frac{C}{\overline{R}'-1}\right)4\overline{R}'^2<\left(P+\frac{C}{\overline{R}'-1}\right)4\overline{R}'^2.$$

В качестве второго вспомогательного средства используем следующий результат Сеге ([2]):

Вспомогательная теорема 2. *Существует число $\eta > 0$ и многочлен*

$$Q\left(\frac{1}{w}\right) = a_0 + \frac{a_1}{w} + \ldots + \frac{1}{w^q}$$

подходящей степени $q = q(\eta)$ такие, что на любой кривой $\Gamma_{1-\delta}$ с постоянной внешней дугой окружности при $\delta < \eta$ выполнено неравенство

$$\left| Q\left(\frac{1}{w}\right)\right| < \frac{1}{2}.$$

Теперь допустим, что ряд (c) можно продолжить аналитически вне C_1. В таком случае будет существовать некоторое число δ_0 и множество кривых $\overline{C}_{1-\delta}$, внутри и на которых функция $f(z)$ будет аналитической, если $\delta \leqslant \delta_0$.

Пусть $|d_\lambda - d_\mu| \geqslant d > 0$, $\lambda \neq \mu$. Выберем $\delta > 0$, $\delta \leqslant \delta_0$ столь малым, чтобы многочлен $Q(1/w)$, который по абсолютной величине меньше $^1/_2$ на кривой Γ_1, имел это же самое свойство и на кривой $\Gamma_{1-\delta}$. Пусть $\overline{C}_{1-\delta}$ есть прообраз таким образом выбранной и остающейся в дальнейшем постоянной кривой $\Gamma_{1-\delta}$. Согласно нашему предположению, функция $f(z)$ будет аналитической на и внутри кривой $\overline{C}_{1-\delta}$.

Если $\varepsilon > 0$ — произвольное число, возведем $Q(1/w)$ в такую степень, чтобы для полученного многочлена $R\left(\frac{1}{w}\right) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{w} + \ldots + \frac{1}{w^r}$ мы имели бы $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{1-\delta}} \left|R\left(\frac{1}{w}\right)\right| |dw| < \frac{\varepsilon}{M}$, где M — число из вспомогательной теоремы 1.

Ввиду того, что разложение функции $f(z) - s_{n-1}(z)$ по многочленам Фабера однозначно, при $k \geqslant n$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{1-\delta}} \frac{f[\psi(w)] - s_{n-1}[\psi(w)]}{w^{k+1}}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{C}_{1-\delta}} \frac{f(z) - s_{n-1}(z)}{[\Phi(z)]^{k+1}}\, dw,$$

где $w = \Phi(z)$, а $\psi(w)$ является обратной функцией $\Phi(z)$.

Тогда при $n > N$ получим

$$|\alpha_0 c_n + \alpha_1 c_{n+1} + \ldots + \alpha_{r-1} c_{n+r-1} + c_{n+r}| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\overline{C}_{1-\delta}} \frac{f(z) - s_{n-1}(z)}{[\Phi(z)]^{n+1}} R\left(\frac{1}{w}\right) dw\right| < \frac{M}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{1-\delta}} \left|R\left(\frac{1}{w}\right)\right| |dw| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Если $\varepsilon = d$ и $n > N$, получаем

$$|\alpha_0 c_n + \alpha_1 c_{n+1} + \ldots + \alpha_{r-1} c_{n+r-1} + c_{n+r}| < \frac{d}{2}. \tag{10}$$

Как доказал Сеге, если коэффициенты c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, принимают только конечное число значений, то из последнего неравенства следует, что значения c_n периодически повторяются после известного индекса. Так как этот результат противоречит нашему допущению. теорема доказана.

Математический институт при Софийском университете
София, Болгария

Поступило
28 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М. — Л., 1950.
[2] G. Szegö, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Mathem. Klasse, 88 (1922).