Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. Н. ВЕКУА

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей работе изучаются вопросы полноты и замкнутости системы шаровых функций — однородных гармонических полиномов:

$$U_{nm} \equiv r^n P_{nm}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{matrix} \quad (m \leqslant n). \tag{1}$$

1. Пусть S — поверхность Ляпунова, а D_i и D_e — внутренняя и внешняя области, ограниченные S.

Теорема 1. *Система шаровых функций* (1) *полна относительно любой поверхности* S.

Доказательство. Надо доказать, что не существует суммируемой функции $\nu(M)$ точки $M \in S$, отличной от нуля на множестве положительной (поверхностной) меры, которая удовлетворяет равенствам:

$$(\nu, U_{nm}) = \iint\limits_S \nu(M)\, U_{nm}(M)\, dS_M = 0 \quad (m = 0, \ldots, n;\ n = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

Если $\nu(M)$ удовлетворяет равенствам (2), то потенциал простого слоя

$$V(P, \nu) = \iint\limits_S \frac{\nu(M)\, dS_M}{MP} = 0 \quad \text{в} \quad D_e. \tag{3}$$

Это легко докажем, если воспользуемся известным разложением $1/\overline{MP}$ по шаровым функциям вблизи бесконечности. Если $\nu(M)$ — непрерывная функция, то на основании известных свойств потенциала простого слоя легко увидим, что $\nu(M) = 0$ всюду на S. Если же $\nu(M)$ — суммируемая функция, то, опираясь на свойство устойчивости задачи Дирихле в отношении деформации области ([1]), докажем, что $\nu(M) = 0$ почти везде на S.

2. Ортогонализируя систему (1) относительно S, получим ортонормальную систему гармонических полиномов $\{V_n(x, y, z)\}$: $(V_n, V_m) = \delta_{nm}$.

Теорема 2. *Система ортонормальных относительно* S *гармонических полиномов* $\{V_n(x, y, z)\}$ *замкнута, т. е. для любых двух функций* $f(M)$ *и* $g(M) \in L_2(S)$ *имеет место равенство:*

$$\iint\limits_S f(M)\, g(M)\, dS_M \equiv (f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n, \tag{4}$$

где

$$f_n = (f, V_n), \quad g_n = (g, V_n).$$

Доказательство этой теоремы проводится без труда при помощи теоремы Фишера — Рисса и теоремы 1.

Из теоремы 2 вытекает, что ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty}(f, V_n)\, V_n(M)$ сходится в среднем к $f(M)$, если $f(M) \in L_2(S)$. Иными словами, любую функцию $f \in L_2(S)$ можно приблизить в среднем посредством гармонических полиномов. При этом следует подчеркнуть, что в качестве таких полиномов можно брать отрезки ряда Фурье.

3. Пусть $\Gamma(P, Q)$ — функция Грина задачи Дирихле для области D_i. Полагая

$$f(M) = \frac{d\Gamma(P, M)}{dn_M}, \quad g(M) = \frac{d\Gamma(Q, M)}{dn_M}, \tag{5}$$

где P, Q — фиксированные точки области D_i; M — точка поверхности S; n_M — нормаль к S в точке M, будем иметь:

$$f_n = \iint V_n(M) \frac{d\Gamma(P, M)}{dn_M}\, dS_M = V_n(P), \quad g_n = V_n(Q). \tag{6}$$

Согласно равенству (4) имеем:

$$K(P, Q) \equiv \iint_S \frac{d\Gamma(P, M)}{dn_M} \frac{d\Gamma(Q, M)}{dn_M}\, dS_M = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(P)\, V_n(Q). \tag{7}$$

Этот ряд сходится для любых P и Q внутри D_i, причем сумма его $K(P, Q)$ есть гармоническая функция относительно P и Q в отдельности внутри D_i. Так как $\frac{d\Gamma(P, M)}{dn_M} > 0$, то, очевидно, $K(P, Q) > 0$ при $P, Q \in D_i$. Докажем теперь, что ряд (7) абсолютно и равномерно сходится относительно P и Q внутри D_i.

Пусть $P = Q$. Тогда будем иметь положительный сходящийся ряд

$$K(P, P) \equiv \iint_S \left(\frac{d\Gamma(P, Q)}{dn_M}\right)^2 dS_M = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(P), \tag{8}$$

который, согласно теореме Дини, сходится равномерно внутри D_i. На основании этого легко доказать, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно внутри D_i относительно обоих аргументов P и Q.

Если зафиксируем $P \in D_i$ и устремим Q к S, то из (7) получим:

$$K(P, Q) \equiv \frac{d\Gamma(P, Q)}{dn_Q} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(P)\, V_n(Q), \quad P \in D_i, \quad Q \in S. \tag{9}$$

Этот ряд сходится в среднем относительно Q, причем равномерно в отношении P при $P \in D_i$, где D_i — произвольное замкнутое множество, лежащее внутри D_i.

В случае сферы справедлива более сильная теорема:

Теорема 3. *Ряд* (9) *равномерно сходится при* $P \in D_i'$, $Q \in D_i + S$, *где* D'_i — *произвольное замкнутое множество, лежащее внутри сферы* S.

Есть основание предполагать, что эта теорема справедлива также для в достаточной мере гладких поверхностей S.

4. Теорема 4. *Гармоническая в области D_i функция $U(P)$, принимающая на S значения непрерывной функции $f(M)$ точки $M \in S$, разлагается в ряд*:

$$U(P) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n V_n(P), \quad f_n = (f, V_n), \tag{10}$$

который абсолютно и равномерно сходится внутри D_i.

Доказательство. Разложение (10) сразу получим из формулы

$$U(P) = \iint_S f(M) \frac{d\Gamma(P_1 M)}{dn_M} dS_M, \quad P \in D_i, \tag{11}$$

если учтем теорему 2 и формулы (6). Равномерную и абсолютную сходимость этого ряда внутри D_i легко докажем при помощи критерия Коши, если примем во внимание равномерную сходимость ряда (8).

Из теоремы 4 вытекает следующая известная теорема [2]:

Теорема 5. *Любую гармоническую в области D_i функцию $U(P)$ можно приблизить равномерно внутри D_i посредством гармонических полиномов.*

5. Теорема 6. *Любую непрерывную на S функцию $f(M)$ можно равномерно приблизить посредством гармонических полиномов.*

Доказательство. Пусть S_ρ — поверхность уровня $G_0 = \rho$, $0 \leqslant \rho < 1$, где G_0 — гармоническая в D_e функция, обращающаяся в нуль на S и в единицу на бесконечности. Пусть $U_\rho(P)$ — гармоническая внутри S_ρ функция, принимающая на S_ρ значения функции f. На основании отмеченного выше свойства устойчивости задачи Дирихле можно доказать, что $\lim_{\rho \to 0} U_\rho(M) = f(M)$ равномерно относительно $M \in S$. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что

$$|f(M) - U_\rho(M)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } M \in S, \ \rho \leqslant \eta(\varepsilon). \tag{12}$$

Так как $U_\rho(P)$ гармонична внутри S_ρ, то, согласно теореме 5, существует такой гармонический полином $W(P)$, который при фиксированном $\rho \leqslant \eta(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству:

$$|U_\rho(P) - W(P)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } P \in D_i + S. \tag{13}$$

В силу (12) и (13) получим неравенство

$$|f(P) - W(P)| < \varepsilon \quad \text{при } P \in S, \tag{14}$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 6 вытекает следующая теорема:

Теорема 7. *Всякую гармоническую в области D_i и непрерывную в $D_i + S$ функцию $U(P)$ можно приблизить равномерно в замкнутой области $D_i + S$ посредством гармонических полиномов.*

6. Аналогичные теоремы можно доказать и для случая бесконечной области D_e. Тогда надо рассматривать шаровые функции

$$r^{-n-1} P_{nm}(\cos\theta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \quad (m \leqslant n),$$

имеющие полюс внутри S. Результаты можно обобщить на случай многосвязной (конечной или бесконечной) области и на многомерные пространства. В случае плоскости эти результаты хорошо известны.

Приведенные теоремы справедливы и в том случае, когда D_l представляет собой совокупность раздельно лежащих областей $D_1, \ldots, D_m$, устойчивых в отношении задачи Дирихле.

Поступило
23 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, Усп. матем. наук, в. 8, 171 (1941). [2] М. Келдыш, М. Лаврентьев, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1, 163 (1937).