Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 4

МАТЕМАТИКА

А. З. ВАЛЬФИШ

О ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 III 1953)

Обозначения. В этой заметке применяются следующие обозначения: d, m, n, q, M, U, V обозначают положительные целые числа; k — неотрицательные целые числа; j — одно из чисел 0 или 1; p — простые числа; w, N — положительные числа; x — числа $\geqslant 3$; v — действительные числа; S — комплексные числа. Эти буквы, в случае надобности, снабжаются индексами или акцентами. Интервалом типа M называется совокупность чисел n, для которых

$$M \leqslant n \leqslant M', \quad \text{где} \quad M \leqslant M' \leqslant 1{,}4\, M.$$

Буквой B без индексов обозначаются числа, по модулю не превосходящие абсолютных констант.

$\mathrm{l}\, w$, $\mathrm{ll}\, w$, $\mathrm{lll}\, w$ обозначают $\log w$, $\log\log w$, $\log\log\log w$. При этом w считается настолько большим, чтобы соответствующий логарифм был >1. Если нижний предел суммирования не указан, он предполагается равным единице. Далее,

$$e(v) = e^{iv}, \quad \exp(v) = e^v, \quad \psi(v) = v - [v] - {}^1/_2,$$

$$\Phi(x) = \sum_{n \leqslant x} \varphi(n) - \frac{3}{\pi^2} x^2, \quad \Psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right),$$

$$\mathrm{l}\, x = t, \quad X = [t^{1/4} (\mathrm{l}t\, \mathrm{ll}\, t)^{-3/2} + 1], \quad \mathrm{l}\, N = s, \quad H = \exp(\mathrm{l}\, s\, \mathrm{lll}\, s),$$

$$P = \prod_{p \leqslant N^{1/2}} p, \quad N_0 = \exp\left(\frac{s}{3\, \mathrm{l}\, s\, \mathrm{lll}\, s}\right),$$

$$S(x, N) = \sum_{p \leqslant N} e\left(\frac{x}{p}\right), \quad S_1(x, N) = \sum_{n \leqslant N} \mu(n)\, e\left(\frac{x}{n}\right).$$

Постановка задачи. Целью работы является доказательство оценки

$$\Phi(x) = Bx\, (\mathrm{l}\, x)^{3/4} (\mathrm{ll}\, x)^2, \tag{1}$$

более точной, чем хорошо известная оценка Мертенса $\Phi(x) = Bx\, \mathrm{l}\, x$ ([1] или [2]).

Ход доказательства. Поскольку $\Phi(x) = -x\Psi(x) + B(x)$, то достаточно доказать, что

$$\Psi(x) = B\, (\mathrm{l}\, x)^{3/4} (\mathrm{ll}\, x)^2. \tag{2}$$

Чтобы получить эту оценку, нужно, прежде всего, достаточно хорошо оценить сумму $S(x, N)$ при условии, что $x^{1/X} < N \leqslant x \exp(-t^{1/2})$.

Здесь

$$S(x, N) = S_0 - S_1 + BN^{1/2}, \tag{3}$$

где

$$S_j = \sum_{dm \leqslant N,\ d/P,\ \mu(d)=(-1)^j} e\left(\frac{x}{dm}\right). \tag{4}$$

Интервал суммирования по m в сумме S_j, а именно $0 < m \leqslant N$, разлагается на Bs интервалов типа M. Отсюда $S_j = \sum\limits_M S_j(M)$, где $S_j(M)$— часть суммы S_j, отвечающая данному интервалу типа M.

Далее доказывается, что

$$S_j(M) = BNH^{-1}, \quad \text{если } M \geqslant N^{200/401}. \tag{5}$$

Пусть $M \leqslant N^{200/401}$. Тогда

$$S_j(M) = \sum_{k=0}^{k_0} S_{kj}(M), \qquad S_{kj}(M) = \sum_{M \leqslant m \leqslant M',\ \delta_k \leqslant N m^{-1}} e\left(\frac{x}{\delta_k m}\right); \tag{6}$$

при этом δ_k пробегает те числа d из области суммирования суммы $S_j(M)$, которые имеют ровно k простых делителей $p > N_0$, а k_0 есть наибольшее k. При $k = 0$ доказывается оценка $S_{0j}(M) = BNH^{-1}s$. Если же $k > 0$, то

$$S_{kj}(M) = k^{-1} T_{kj}(M) + Bk^{-1}NH, \tag{7}$$

где

$$T_{kj}(M) = \sum_{\substack{M \leqslant m \leqslant M',\ pq \leqslant Nm^{-1},\ N_0 < p \leqslant N^{1/2} \\ q = \delta_{k-1},\ \mu(q) = (-1)^{j+1}}} e\left(\frac{x}{pqm}\right). \tag{8}$$

Интервал суммирования по p в $T_{kj}(M)$ разлагается на Bs интервалов типа U, что дает равенство $T_{kj}(M) = \sum\limits_U T_{kj}(M, U)$. Далее, доказывается, что

$$T_{kj}(M, U) = BT(M, U) + BN^2H^{-1}s^3, \tag{9}$$

где

$$T(M, U) = MU_s^3 \sum_{\substack{q_1 < q \leqslant NM^{-1}U^{-1} \\ N^{-1}MUH^{-1} \leqslant w \leqslant N^{-1}MUH}} \left| \sum_{n=V}^{V_1} e\left(\frac{xw}{n}\right) \right|, \tag{10}$$

$$w = q_1^{-1} - q^{-1}, \qquad MU \leqslant V \leqslant V_1 \leqslant 2MU. \tag{11}$$

Для суммы $T(M, U)$ доказывается оценка

$$T(M, U) = BN^2H^{-1}s^6. \tag{12}$$

Собирая полученные результаты, имеем искомую оценку суммы $S(x, N)$:

$$S(x, N) = BNH^{-1/2}s^6. \tag{13}$$

Вторым этапом при доказательстве оценки (2) является оценка суммы $S_1(x, N)$ при условии, что $x^{2/X} \leqslant N \leqslant x \exp(-t^{1/2})$. Здесь

$$S_1(x, N) = -S^{(1)} - S^{(2)} + BNH^{-1}s, \tag{14}$$

где

$$S^{(1)} = \sum_{\substack{q \leqslant N_0 \\ N_0 < p \leqslant N_q^{-1}}} \mu(q)\, e\left(\frac{x}{pq}\right), \qquad S^{(2)} = \sum_{\substack{N_0 < p < NN_0^{-1} \\ N_0 < q \leqslant N_p^{-1},\ g(q) < p}} \mu(q)\, e\left(\frac{x}{pq}\right); \tag{15}$$

при этом $g(q)$ обозначает число простых делителей числа q.

Для суммы $S^{(1)}$ получается с помощью оценки (13)

$$S^{(1)} = BNH^{-1/8}s^7. \tag{16}$$

В $S^{(2)}$ интервал суммирования по p разлагается на Bs интервалов типа U, что дает равенство $S^{(2)} = \sum\limits_U S^{(2)}(U)$. Далее, доказывается, что

$$\{S^{(2)}(U)\}^2 = BT(1, U) + BN^2H^{-1}s^3, \tag{17}$$

где $T(1, U)$ определяется на основе (10). Для суммы $T(1, U)$ оценка (12) сохраняет силу, откуда

$$S^{(2)}(U) = BNH^{-1/2}s^3. \tag{18}$$

Собирая полученные результаты, получаем искомую оценку суммы $S_1(x, N)$:

$$S_1(x, N) = BNs^{-4}. \tag{19}$$

В третьем этапе доказательства оценки (2) применяем, опираясь на (19), несколько видоизмененную форму известного приема Пфейффера. Это дает для целочисленных x оценку

$$\sum_{x^{6/X} \leqslant n \leqslant x \exp(-t^{1/2})} \frac{\mu(n)}{n}\, \psi\left(\frac{x}{n}\right) = B. \tag{20}$$

Переход от (20) к (2) не представляет никаких затруднений. Выкладки являются длинными и сложными, но они элементарны — в том смысле, в каком элементарность понимается в аналитической теории чисел. При этом использованы в основном следующие средства:

1) известный метод Виноградова оценки тригонометрических сумм с простыми числами ([3]);

2) метод Дэвенпорта ([4]), позволяющий, при наличии некоторых условий, избавиться от множителей $\mu(n)$; этот метод использует результаты Виноградова;

3) оценки тригонометрических сумм Ван дер Корпута ([5]), Л. К. Хуа ([6]) и автора ([7]). Кроме того, с помощью оценки Л. К. Хуа улучшается лемма 1 работы ([8]) автора.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
16 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Mertens, J. f. reine u. angew. Math., 77, 289 (1874). [2] И. М. Виноградов, Основы теории чисел, изд. 5-е, 1949, стр. 132. [3] И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 1947, стр. 81—84. [4] H. Davenport, Quart. J. of. Math., Oxford, ser. 8, 313 (1937). [5] J. G. van der Corput, Math. Ann., 84, 53, теорема 2 (1921). [6] Хуа-Ло-Кен, Аддитивная теория простых чисел, 1947, стр. 172, лемма. [7] А. З. Вальфиш, Math. Z., 26, 66, лемма 3 (1927). [8] А. З. Вальфиш, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 5, 181 (1938).