Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 4

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

УСЛОВИЕ НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ, ЧТОБЫ ПОЧТИ ВОЗРАСТАЮЩАЯ [1] ЧЕТНАЯ ФУНКЦИЯ БЫЛА СЛАБО ВЕСОВОЙ *

1. Для краткости письма мы ограничимся здесь, как и в заметке [2], рассмотрением монотонно возрастающих (при $x>0$) четных (м. в. ч.) функций $\Phi(x)\geqslant 1$ и прибавим кроме того допущение, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\Phi(x)}=0$.

Теорема В. *Пусть $H_p(x)$ будут любые целые функции с четным модулем $|H_p(x)|$ той же фиксированной степени $p>0$ ($|H_p(0)|>0$), удовлетворяющие неравенству*

$$|H_p(x)|\leqslant\Phi(x)\quad(-\infty<x<\infty). \tag{1}$$

Для того чтобы $\Phi(x)$ была слабо весовой функцией, необходимо и достаточно, чтобы была бесконечна верхняя грань L_p функционала

$$S[H_p(x)]=|H_p(0)|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2|\beta_k|}{\alpha_k^2+\beta_k^2} \tag{2}$$

для всех рассматриваемых функций $H_p(x)$, где $\alpha_k+i\beta_k$ — корни $H_p(x)$.

Сделаем два предварительных замечания. 1) Если

$$\sup_{|H_p(x)|\leqslant\Phi(x)} S[H_p(x)]=L_p, \tag{3}$$

то при всяком $c>0$

$$\sup_{|H_p(x)|\leqslant c\Phi(x)} S[H_p(x)]=cL_p. \tag{3bis}$$

2) Каково бы ни было θ $(0<\theta<1)$,

$$\theta L_p\leqslant L_{\theta p}\leqslant L_p. \tag{4}$$

---

* Функция $\Phi(x)>0$ $(-\infty<x<\infty)$ называется слабо весовой [1] ($\Phi(x)\in V$) если, каково бы ни было данное число $p>0$ и какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$ ($\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$), можно построить такую последовательность целых функций $G_{p,n}(x)$ степени p, что равномерно на всей вещественной оси $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|G_{p,n}(x)-f(x)|}{\Phi(x)}=0$. (Требование $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ можно заменить менее ограничительным условием $f(x)=o[\Phi(cx)]$ при $x\to\pm\infty$, каково бы ни было $c>0$.)

Первое утверждение следует из того, что неравенство (1) равнозначно неравенству $c\,|H_p(x)|\leqslant c\Phi(x)$. Для получения второго утверждения достаточно заметить, что, благодаря монотонности $\Phi(x)$,

$$|H_p(\theta x)|=|H_{\theta p}(x)|\leqslant\Phi(\theta x)\leqslant\Phi(x),$$

но

$$S[H_p(\theta x)]=|H_p(0)|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\,|\beta_k|\,\theta}{\alpha_k^2+\beta_k^2}=\theta S[H_p(x)].$$

Докажем сначала достаточность. Беря $M>1$ произвольно большим, можем подобрать функцию $H_p(x)$, для которой $S[H_p(x)]>2M$, и затем, взяв n_0 достаточно большим, построим (пользуясь строкой Тэйлора) последовательность четных многочленов $R_n(x)$ степеней $n>n_0$ $(R_n(0)=H_p(0))$, корни которых $\alpha_{k,n}+i\beta_{k,n}$ удовлетворяют условию

$$|R_n(0)|\sum_{k=1}^{n}\frac{|\beta_{k,n}|}{\alpha_{k,n}^2+\beta_{k,n}^2}>M, \tag{5}$$

причем, полагая $\lambda_n=n/3p$, получаем

$$|H_p(x)-R_n(x)|<\frac{1}{M}=\varepsilon<1\quad(-\lambda_n\leqslant x\leqslant\lambda_n). \tag{6}$$

Вследствие (5), согласно неравенству (16) стр. 141 монографии [3], можно построить такие четные многочлены $P_n(x)$ степени не выше n, что

$$||x|-P_n(x)|<\varepsilon\,|R_n(x)|\quad(-\infty<x<\infty); \tag{7}$$

при этом, благодаря (6), имеем, в частности,

$$||t|-P_n(t)|<\varepsilon(|H_p(t)|+1)\quad(-\lambda_n\leqslant t\leqslant\lambda_n). \tag{8}$$

Положим теперь

$$t=t_n(x)=\lambda_n\sin\frac{x}{\lambda_n}; \tag{9}$$

в таком случае при $-\infty<x<\infty$ имеем $|t_n(x)|\leqslant\lambda_n$ и $|t_n(x)|\leqslant|x|$. С другой стороны, полагая

$$G^*_{p_0}(x)=P_n(t_n(x)), \tag{10}$$

видим, что $G^*_{p_0}(x)$ будет целой четной функцией переменной x степени $p_0\leqslant n/\lambda_n=3p$. Поэтому из неравенства (8) после подстановки (9) вследствие (1) получим

$$\left|\lambda_n\left|\sin\frac{x}{\lambda_n}\right|-G^*_{p_0}(x)\right|<\varepsilon[\Phi(t_n(x))+1]\leqslant\varepsilon[\Phi(x)+1]\leqslant2\varepsilon\Phi(x). \tag{11}$$

Заметим еще, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$ при λ_n достаточно большом, имеем*

$$\left||x|-\lambda_n\left|\sin\frac{x}{\lambda_n}\right|\right|<2\varepsilon\Phi(x)\quad(-\infty<x<\infty). \tag{12}$$

Складывая (11) и (12), получаем

$$||x|-G^*_{p_0}(x)|<4\varepsilon\Phi(x)\quad(-\infty<x<\infty). \tag{13}$$

Применяя то же самое рассуждение, что в монографии [3] (стр. 145—146), получим из (13) аналогичное неравенство

$$|f(x)-G_{p_0}(x)|<\varepsilon\Phi(x)\quad(-\infty<x<\infty) \tag{14}$$

для любой непрерывной функции $f(x)=o(1)$ при $x\to\pm\infty$, где $G_{p_0}(x)$ — целая функция степени $\leqslant p_0$.

2. Доказательство необходимости, т. е. доказательство того, что при условии

$$\sup_{|H_p(x)|\leqslant\Phi(x)}S[H_p(x)]=L_p<\infty \tag{15}$$

---

* Для этого фиксируем L так, чтобы иметь $|x|<\varepsilon\Phi(x)$ при $|x|\geqslant L$; для этих значений x неравенство (12) соблюдено при любых λ_n. После этого берем λ_n настолько большим, чтобы при $|x|<L$ неравенство (12) также осуществлялось.

$\Phi(x)$ не может быть слабо весовой, аналогично * тому, которое было дано для случая весовых функций [2]. Однако для дальнейшего полезно записать соответствующие неравенства в общем виде.

Если функция $H_p(x)$ *с четным модулем той же степени* p *удовлетворяет* (1), *то имеет место неравенство*

$$|H_p'(0)| \leqslant L_p. \tag{16}$$

Из (16) следует, что, *если* $R_p(x)$ — *любая вещественная функция степени* p, *удовлетворяющая* (1), *то*

$$|R_p'(0)| \leqslant \sqrt{2}\, L_p. \tag{17}$$

Для доказательства ** (17) замечаем, что $|R_p(x)| \leqslant |H_p(x)| = |R_p(x) + iR_p(-x)| \leqslant \sqrt{2}\,\Phi(x)$, и применяем ($3^{\text{bis}}$) к $H_p(x)$.

Учитывая, что вследствие монотонности $\Phi(x)$ имеет место неравенство $\Phi\left(\frac{x_0+x}{2}\right) \leqslant \frac{\Phi(x_0)\,\Phi(x)}{\Phi(0)}$, получим

$$\left|R_p\left(\frac{x_0+x}{2}\right)\right| \leqslant \sqrt{R_p^2\left(\frac{x_0+x}{2}\right) + R_p^2\left(\frac{x_0-x}{2}\right)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\Phi^2\left(\frac{x_0+x}{2}\right) + \Phi^2\left(\frac{x_0-x}{2}\right)} \leqslant \sqrt{2}\,\frac{\Phi(x_0)\,\Phi(x)}{\Phi(0)}.$$

Следовательно, произвольно фиксируя постоянную x_0 $(-\infty < x_0 < \infty)$, для производной функции $R_{p/2}^{*}(x, x_0) = R_p\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$ степени $p/2$ в точке $x=0$ имеем $\frac{1}{2}\left|R_p'\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}\,\frac{\Phi(x_0)}{\Phi(0)}\,L_{p/2}$, т. е. (полагая $\Phi(0)=1$) получаем

$$|R_p'(x)| \leqslant 2\sqrt{2}\,L_{p/2}\Phi(2x) \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{18}$$

Следовательно, осуществление (14) невозможно, если функция $f(x)$ на каком-нибудь данном конечном отрезке не удовлетворяет условию Липшица.

Следствие 1. *Для того чтобы ч. м. в. функция* $\Phi(x) > c > 0$ *была слабо весовой, необходимо и достаточно, чтобы она была антимайорантой* [1].

Повторяя предыдущий прием, получаем, кроме того:

$$|R_p''(x)| \leqslant 2(2\sqrt{2})^2 L_{p/2} L_{p/4}\Phi(4x) \leqslant 16 L_{p/2}^2 \Phi(4x) \tag{19}$$

и *аналогичные наравенства для всех последующих производных* ***.

3. Теорема C. *Если ч. м. в.* $\Phi(x) > 0$ *не является весовой функцией* ($\Phi(x) \in \overline{W}$), *а для функции* $f(x)$ *при любом* $\varepsilon > 0$ *возможны неравенства*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon\Phi(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{20}$$

---

* Вместо моей старой алгебраической теоремы [3] (стр. 139) о максимуме модуля производной, примененной в [2], следует применить ее обобщение для функций конечной степени, данное Б. Я. Левиным в [4].

** В случае $R_p(0) = 0$ можно положить $H_{p,\varepsilon}(x) = |R_p(x) + \varepsilon + i(R_p(-x) + \varepsilon)|$ с произвольно малым $\varepsilon > 0$.

*** Если отбросить требование вещественности, то верхние границы производных $G_p^{(n)}(x)$ любого порядка всякой функции $G_p(x) = R_p(x) + iQ_p(x)$, удовлетворяющей (1), получаются умножением на $\sqrt{2}$ границ, соответствующих $|R_p^{(n)}(x)|$.

где $P(x)$ — многочлены, то $f(x)$ должна быть функцией вида $f(x) = e^{hx^2}S(x)$, причем $S(x)$ есть целая функция первого рода, корни которой $\alpha_k + i\beta_k$ подчинены условиям

$$\sum \frac{1}{\alpha_k^2+\beta_k^2} < \infty, \quad \sum' \frac{|\beta_k|}{\alpha_k^2+\beta_k^2} < \infty. \tag{21}$$

Теорема D. *Если ч. м. в. функция $\Phi(x) > 0$ не является слабо весовой ($\Phi(x) \in \overline{V}$), то свойством, указанным в теореме C, обладает всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая* (14).

Ввиду полной аналогии теорем C и D ограничимся доказательством последней. Для краткости примем, кроме того, что $f(x)$ — четная функция и $|f(0)| = |G_p(0)| > 0$. На основании условия (15) и вытекающих из него неравенств (16) и (19), для всего множества рассматриваемых функций $G_p(x)$ степени p можно указать верхние границы

$$\sup \left| \frac{G_p'(0)}{G_p(0)} \right| < M', \quad \sup \left| \frac{G_p''(0)}{G_p(0)} \right| < M''. \tag{22}$$

При этом, беря среди функций $G_p(x)$, имеющих тот же модуль $|G_p(x)|$ на действительной оси, ту из них, корни которой $\pm\alpha_k - i\beta_k$ лежат в нижней полуплоскости, получим

$$\frac{G_p'(x)}{G_p(x)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x+\alpha_k+i\beta_k} + \frac{1}{x-\alpha_k+i\beta_k}\right] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i\beta_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2} + 2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^2-\alpha_k^2}{(\beta_k^2+\alpha_k^2)^2} + \ldots,$$

откуда

$$\frac{G_p'(0)}{G_p(0)} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i\beta_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2},$$

$$\frac{G_p''(0)}{G_p(0)} - \left[\frac{G_p'(0)}{G_p(0)}\right]^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^2-\alpha_k^2}{(\alpha_k^2+\beta_k^2)^2} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^2}{(\alpha_k^2+\beta_k^2)^2} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k^2+\beta_k^2}.$$

Следовательно, благодаря (22), имеем

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k^2+\beta_k^2} \leqslant \left|\frac{G_p''(0)}{G_p(0)}\right| + \left|\frac{G_p'(0)}{G_p(0)}\right|^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^2}{(\alpha_k^2+\beta_k^2)^2} \leqslant M'' + M'^2 + 2M' = 2M. \tag{23}$$

Принимая во внимание, что при всех вещественных и комплексных z $|(1-z)e^z| \leqslant e^{|z^2/2|}$, заключаем, что все рассматриваемые функции $G_p(z)$, для которых соблюдается (14), имеющие вид $G_p(z) = G_p(0)\prod\left(1-\frac{z}{\alpha_k+i\beta_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k+i\beta_k}}$, во всей плоскости удовлетворяют неравенству (вследствие (23))

$$|G_p(z)| \leqslant |G_p(0)|\, e^{\left|\frac{z^2}{2}\right|\sum\frac{1}{\alpha_k^2+\beta_k^2}} \leqslant |G_p(0)|\, e^{\frac{M}{2}|z^2|}. \tag{24}$$

Для окончания доказательства достаточно применить классическую теорему Стилтьеса.

В следующей заметке мы дадим некоторые дополнения к полученным здесь результатам.

Поступило
7 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., **16**, 497 (1952). [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, **88**, № 4 (1953) [3] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. [4] Б. Я. Левин, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, 45 (1950).