Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. Я. АРЕШКИН

ОБ ОТНОШЕНИЯХ КОНГРУЕНЦИИ В ДИСТРИБУТИВНЫХ СТРУКТУРАХ С НУЛЕВЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 III 1953)

В работе изучается связь между отношениями конгруенции и μ-идеалами в дистрибутивных структурах с нулевым элементом*.

1. Как известно (1), для всякого отношения конгруенции K, определенного на дистрибутивной структуре с нулевым элементом, класс элементов $x \equiv 0 \pmod{K}$ образует μ-идеал этой структуры. Известно также, что для всякого μ-идеала I такой структуры L имеется отношение конгруенции $\underline{K}(I)$ на L, для которого этот идеал является «ядром», т. е. классом элементов $x \equiv 0 \pmod{\underline{K}(I)}$. Это отношение конгруенции определяется по следующему правилу:

I. $x \equiv y \pmod{\underline{K}(I)}$, $x, y \in L$, *тогда и только тогда, когда* $x \vee t = y \vee t$ *для некоторого элемента* t *из* I.

Нетрудно видеть, что $\underline{K}(I)$ является наименьшим отношением конгруенции с ядром I. Таким образом, в указанных структурах каждый μ-идеал определяет по правилу I наименьшее отношение конгруенции с ядром I.

Теорема 1. *В дистрибутивной структуре L с нулевым элементом каждый μ-идеал определяет по нижеследующему правилу* II наибольшее отношение конгруенции $\overline{K}(I)$ среди всех отношений конгруенции с ядром I:

II. $x \equiv y \pmod{\overline{K}(I)}$, $x, y \in L$, *тогда и только тогда, когда из включения* $a \wedge (x \wedge y) \in I$ *следует включение* $a \wedge (x \vee y) \in I$ *для всякого элемента* a *структуры* L.

2. Пусть θ_1 и θ_2 являются гомоморфными отображениями, соответственно, структуры A на структуру B и структуры B на структуру C. Тогда под произведением $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2$ этих гомоморфных отображений понимается отображение $\theta(x) = \theta_2[\theta_1(x)]$, $x \in A$, являющееся гомоморфным отображением структуры A на структуру C. Если K, K_1 и K_2 являются отношениями конгруенции, соответствующими отображениям θ, θ_1 и θ_2, то K называется произведением конгруенций K_1 и K_2 и обозначается через $K_1 \cdot K_2$. Ясно, что $A / K \approx (A / K_1) / K_2$**.

Рассмотрим сегменты $[\underline{K}(I), \overline{K}(I)]$ отношений конгруенции на структуре L и $[\underline{K}(\overline{0}), \overline{K}(\overline{0})]$ отношений конгруенции на фактор-структуре $L / \underline{K}(I)$, где 0 является нулевым элементом этой фактор-структуры.

* Относительно терминологии см. (1,3).
** $\approx$ знак изоморфизма.

Теорема 2. *Всякое отношение конгруенции K с ядром I, заданное на дистрибутивной структуре L с нулевым элементом, однозначно определяет на фактор-структуре $L \mid \underline{K}(I)$ отношение конгруенции K^* так, что*

1) $K^* \in [\underline{K}(\overline{0}), \overline{K}(\overline{0})]$;

2) $K = \underline{K}(I) \cdot K^*$;

3) *отображение $K \to K^*$ является изоморфным отображением сегмента $[\underline{K}(I), \overline{K}(I)]$ на сегмент $[\underline{K}(\overline{0}), \overline{K}(\overline{0})]$.*

3. Структуру L назовем слабо-дополнительной, если выполнено следующее условие: каковы бы ни были отличные друг от друга элементы x и y структуры, в ней найдется такой элемент z, что $z \wedge (x \wedge y) = 0$, $z \wedge (x \vee y) \neq 0$.

Слабо-дополнительные структуры занимают промежуточное положение между структурами и обобщенными булевскими структурами. Нетрудно показать, что всякая конечная слабо-дополнительная дистрибутивная структура является булевской структурой. Следующая теорема устанавливает характеристику обобщенных булевских структур посредством слабо-дополнительных структур.

Теорема 3. *Дистрибутивная структура L с нулевым элементом является обобщенной булевской структурой тогда и только тогда, когда для всякого μ-идеала I этой структуры фактор-структура $L \mid \underline{K}(I)$ слабо-дополнительна.*

Тесная связь существует также между слабо-дополнительными структурами и наибольшими отношениями конгруенции.

Теорема 4. *Фактор-структура $L \mid \overline{K}(I)$ дистрибутивной структуры L с нулевым элементом по отношению конгруенции $\overline{K}(I)$ с ядром I слабо-дополнительна тогда и только тогда, когда $\underline{K}(I) = \overline{K}(I)$.*

4. Известно ([1,2]), что в булевских структурах между отношениями конгруенции и μ-идеалами имеется взаимно-однозначное соответствие. Проблема 73 книги Биркгофа ([1]) заключается в нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы соответствие между отношениями конгруенции и (нейтральными) идеалами структуры было взаимно-однозначным. Предыдущие результаты позволяют решить эту проблему в случае дистрибутивных структур с нулевым элементом.

Теорема 5. *Выполнение любого из нижеследующих трех условий необходимо и достаточно для того, чтобы на дистрибутивной структуре L с нулевым элементом всякое отношение конгруенции однозначно определялось своим ядром.*

1) *Если для каких-нибудь элементов x и y структуры L и для какого-нибудь ее μ-идеала I $a \wedge (x \wedge y) \in I$ влечет $a \wedge (x \vee y) \in I$, $a \in L$, то существует такой элемент a_0 этой структуры, что $a_0 \wedge (x \wedge y) \in I$, $a_0 \vee (x \wedge y) \geqslant x \vee y$.*

2) *Для всякого μ-идеала I структуры L фактор-структура $L \mid K(I)$ слабо-дополнительна.*

3) *L является обобщенной булевской структурой.*

Поступило
20 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Биркгоф, Теория структур, 1952. [2] M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc., **40**, 37 (1936). [3] M. H. Stone, Čas. pest. mat. a fys., **61**, 1 (1937). [4] V. S. Krichnan, Proc. Ind. Acad. Sci., **22**, 1 (1945).