Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

А. А. ДМИТРИЕВ и Т. В. БОНЧКОВСКАЯ

К ВОПРОСУ О ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ВОЛНЕ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 20 IV 1953)

Изучение турбулентности в волнах представляет проблему, еще очень мало освещенную в литературе. Принято [2] разделять коэффициенты виртуальной вязкости ветровых течений и одновременно возникающего ветрового волнения и считать, что величина последнего значительно меньше. При этом процесс турбулизации обычно связывается с влиянием дна.

Нам кажется, что при наличии вязкости перемешивание может происходить и в бесконечно глубокой жидкости вследствие появления вихря. В областях с большим значением вихря естественно предположить и наибольшую турбулентность.

Пользуясь постановкой задачи Л. Н. Сретенского [1], можем написать систему уравнений движения вязкой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\Delta u; \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g + \nu\Delta w; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

(где ось x направим вдоль линии распространения волны, ось y параллельно гребням (фронту) волн и ось z вертикально вверх; ν — кинематическая вязкость, постоянная для рассматриваемой жидкости; u и w — компоненты скорости; P — давление, ρ — плотность) в виде

$$\frac{i\sigma}{\nu}\overline{\psi} = \Delta\overline{\psi}; \tag{4}$$

$$\Delta\overline{\varphi} = 0 \tag{5}$$

с граничными условиями:
при $z = 0$

$$-\frac{\sigma^2}{g}\overline{\varphi} + \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\overline{\psi} + 2\frac{i\sigma\nu}{g}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right\}; \tag{6}$$

при $z = -\infty$

$$\overline{\varphi} = \overline{\psi} = 0. \tag{7}$$

При этом принято

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \tag{8}$$

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}; \tag{9}$$

$$\psi(x, z, t) = \overline{\psi}(x, z)\, e^{i\sigma t}; \tag{10}$$

$$\varphi(x, z, t) = \overline{\varphi}(x, z)\, e^{i\sigma t} \tag{11}$$

и через σ обозначена частота $2\pi/\tau$.

Для получения окончательных результатов следует брать действительные части выражений (8) и (9).

В случае пульсирующего под поверхностью источника нами получено выражение для функции $\overline{\psi}$ в виде

$$\overline{\psi} = -2\frac{Q}{\pi}\varepsilon \int\limits_0^\infty \frac{\chi(1-2i\chi^2)\, e^{-h\chi+\gamma\zeta} \sin\chi\xi\, d\chi}{4\varepsilon\left[i\chi^3(\chi-\gamma)-\chi^2\right]+i(\chi-\varepsilon)}, \tag{12}$$

где введены безразмерные переменные

$$\varepsilon = \frac{\sigma^2}{g}\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}; \tag{13}$$

расстояние от источника $\xi = x\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}$; глубина источника под поверхностью $h = h_p\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}$; $\gamma = \sqrt{1+\chi^2}$; аппликата $\zeta = z\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}$; через Q обозначена мощность источника.

Не производя вычисления интеграла (12), можно сделать некоторые выводы о его зависимости от глубины точки наблюдения. Вместе с тем определится зависимость величины проекции вихря скорости на ось y, так как, согласно (4) и обозначениям (11), (13):

$$(\operatorname{rot} v)_y = -e^{i\sigma t}\frac{i\sigma}{\nu}\overline{\psi}. \tag{14}$$

Рассмотрим множитель при экспоненциальной функции, показывающий зависимость величины вихря от координат. Обозначим его чертой сверху. Тогда, согласно (12) и (14):

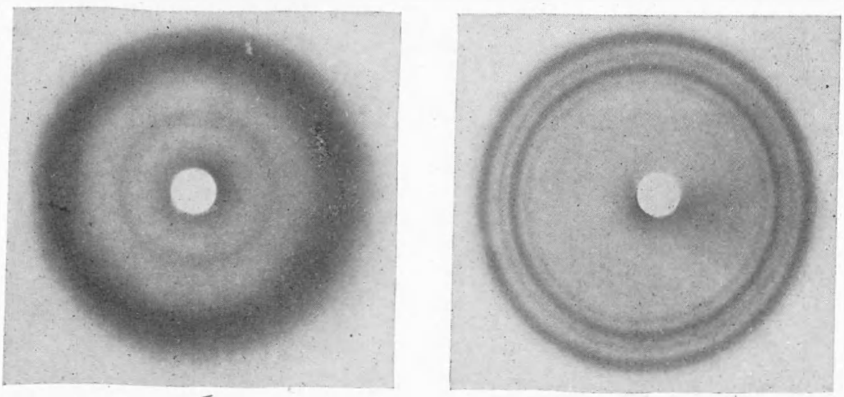
$$\overline{(\operatorname{rot} v)}_y = -\frac{i\sigma}{\nu}\overline{\psi} = 2i\frac{Q}{\pi}\varepsilon\frac{\sigma}{\nu}\int\limits_0^\infty \frac{\chi(1-2i\chi^2)\, e^{-h\chi+\gamma\zeta}\sin\chi\xi\, d\chi}{i(\chi-\varepsilon)+4\varepsilon\left[\chi^3(\chi-\gamma)+i\chi^2\right]i}. \tag{15}$$

Очевидно, что абсолютная величина вихря убывает с увеличением безразмерной глубины ζ точки наблюдения. На поверхности, при $\zeta = 0$, вихреобразование и турбулентность должны быть наиболее сильными. Можно ожидать, что от поверхности книзу должны распространяться завихрения. Действительно, посредством светополяризационного метода нам удалось зафиксировать начало распространения волнения после включения волнопродуктора (см. рис. 1, *а, б, в*). На приведенных фотографиях хорошо видно, как на однородном фоне спокойной жидкости слева появляется распространяющаяся поверхностная волна. Под ней по мере удаления от переднего края все больше возрастает область с неправильными затемнениями — начинающаяся турбулентность. Ниже жидкость еще невозмущена и однородна по своему составу.

а б в

Рис. 1. Светополяризационная картина зарождения турбулентности

К статье Н. В. Михайлова, В. О. Клесман, стр. 99

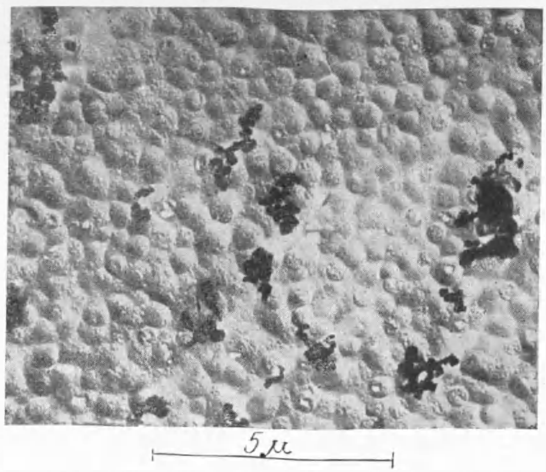


б а

Рис. 1. Рентгенограммы образцов синтетического полиамида, полученных различными способами: *а* — образец, полученный при медленном охлаждении расплава полимера; *б* — образец, полученный при резком охлаждении расплава полимера

К статье З. А. Носовой, М. Е. Яковлевой, стр. 137

Рис. 1. Реплика с титановой глазури, обожженной при 1150°, после 20 сек. травления 40% HF. Черные зерна — напылитель



Естественно, что после того как волнение охватит всю толщу жидкости, около твердых стенок могут появиться вихревые слои, также поставляющие внутрь жидкости турбулентные образования, На рис. 1 *в* показана волна с распространившейся во всей ее толще турбулентностью.

С уменьшением вязкости вихревой слой будет все больше прижиматься к поверхности жидкости — величина вихря все быстрее будет убывать с удалением от нее. Это легко показать, если в выражении (15) выделить в явном виде коэффициент вязкости ν. Имея в виду (13) и что $\chi = \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}\, k$, получаем

$$(\overline{\mathrm{rot}}\, v)_y = 2\,\frac{Q}{\pi}\,\frac{\sigma^2}{g}\int\limits_0^{\infty} \frac{\left(1 - 2ik^2\,\frac{\nu}{\sigma}\right) k e^{-h_p k + z\sqrt{\frac{\sigma}{\nu} + k^2}} \sin k\chi\, dk}{\left(k - \frac{\sigma^2}{g}\right) + 4\,\frac{\sigma^2}{g}\left[\left(\frac{\nu^2}{\sigma^2}\, k^4 - \left(\frac{\nu}{\sigma}\right)^{3/2} k^3 \sqrt{1 + \frac{\nu}{\sigma} k^2}\right) + i\,\frac{\nu}{\sigma}\, k^2\right]}. \tag{16}$$

Отсюда видно, что чем меньше ν, тем больше декремент затухания вихря с глубиной, т. е. величина $\sqrt{\frac{\sigma}{\nu} + k^2}$, входящая в показательную функцию.

Поступило
7 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Н. Сретенский, Тр. ЦАГИ, № 541, ч. 1 (1941). [2] В. М. Маккавеев, Тр. ГГИ, 28 (82) (1951).