Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 1

МАТЕМАТИКА

П. К. СУЕТИН

ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ И ТАУБЕРА ДЛЯ РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ФАБЕРА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 7 V 1953)

Последовательность $\{a_n\}$ и континуум K, дополнение которого есть область G_∞, содержащая точку $z=\infty$, определяют ряд по многочленам Фабера

$$\sum_0^\infty a_n \Phi_n(z), \tag{1}$$

которые, как известно [1], определяются из разложения

$$F(w, z) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_0^\infty \frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}}, \tag{2}$$

где $z=\Psi(w)$ — функция, отображающая конформно внешность единичного круга на область G_∞ при условиях $\Psi(\infty)=\infty$ и $\Psi'(\infty)>0$. Для определения области сходимости ряда (1), когда $\{a_n\}$ и K заданы или принадлежат определенным классам, укажем характер стремления чисел $\{\Phi_n(z)\}$ к нулю или к бесконечности в зависимости от положения точки z на плоскости и от свойств границы Γ континуума K. Пусть Γ_R — прообраз окружности $|w|=1$ при отображении $w=\Phi(z)$, обратном отображению $z=\Psi(w)$; если Γ_R — правильная аналитическая кривая, то функция $F(w, z)$ имеет в точке $z \in \Gamma_R$ простой полюс и, значит, для многочленов Фабера справедливы неравенства [1, 3]

$$C_1 R^n < |\Phi_n(z)| < C_2 R^n, \quad z \in \Gamma_R. \tag{3}$$

Если граница Γ континуума K такова, что $\Psi^{(p+2)}(w) \in H_1$, то, используя теорему Харди — Литтльвуда, нетрудно показать, что ряд

$$\sum_1^\infty n^p [\Phi_n(z)] \tag{4}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри G [4] (G — совокупность внутренних точек K). Если же K — произвольный континуум, то нетрудно показать, что абсолютно и равномерно внутри G сходится ряд

$$\sum_1^\infty \frac{[\Phi_n(z)]^2}{n}. \tag{5}$$

Если $\{a_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = l = \frac{1}{R}$ (l фиксировано), то из неравенства (3) следует, что ряд (1) сходится абсолютно и равномерно внутри области G_R, ограниченной правильной аналитической кривой Γ_R, и расходится вне этой кривой; таким образом, если $l < 1$, то K — просто континуум; если $l = 1$, то K должен иметь правильную аналитическую границу; если же $l > 1$, то не только Γ, но и линия Γ_R $(R = 1/l < 1)$ должна быть правильной аналитической [1,3]. Условие аналитичности кривой Γ_R $(R \leqslant 1)$ можно отбросить, если о $\{a_n\}$ известно больше, чем число l. Так как случаи $l = 1$ и $l > 1$ аналогичны, то рассмотрим только случай $l = 1$.

Из сходимости ряда (4) следует, что если $a_n = O(n^p)$, то для сходимости ряда (1) в G достаточно, чтобы Γ была такова, что $\Psi^{(p+2)}(w) \in H_1$; в частности, если Γ спрямляема, то для абсолютной и равномерной внутри G сходимости ряда (1) достаточно, чтобы $a_n = O(1/n)$. Из сходимости ряда (5) следует, что если $a_n = O(\varepsilon_n / n)$, где $\varepsilon_n > 0$ и ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_n^2/n$ сходится, то ряд (1) сходится абсолютно и равномерно внутри G для любого континуума K. Из теоремы Юнга—Хаусдорфа [2] следует, что ряд (1) сходится абсолютно и равномерно внутри G, если $\{a_n\}$ такова, что ряд $\sum\limits_1^\infty |a_n|^\delta$ сходится, а Γ такова, что $\Psi'(w) \in H_\delta$, где $1 < \delta \leqslant 2$. Не приводя других условий, заметим, что ряд (1) есть ряд Парсеваля двух аналитических функций: $F(w, z)$ и $F(w) = \sum\limits_0^\infty a_n w^n$, и для сходимости ряда (1) достаточно выполнения условий, при которых справедливо равенство Парсеваля для этих двух функций.

Для континуума K рассмотрим еще систему функций $\{F_n(z)\}$, аналитических в G_∞ и определяемых разложением

$$G(w, z) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} - \frac{1}{w - \Phi(z)} = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - \Psi(w_0)} - \frac{1}{w - w_0} = \sum_1^\infty \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}, \tag{6}$$

из которого следуют равенства

$$\Phi_n(z) = [\Phi(z)]^n + F_n(z), \quad z \in G_\infty. \tag{7}$$

Так как граничные свойства функции $G(w, z)$ (z фиксировано в G_∞) тождественны граничным свойствам функции $F(w, z)$ (z фиксировано в G), то все условия на $\{a_n\}$ и на Γ, достаточные для абсолютной и равномерной внутри G сходимости ряда (1), достаточны для такой же сходимости ряда $\sum\limits_1^\infty a_n F_n(z)$ в G_∞; более того, если G^* — полная область однолистности функции $w = \Phi(z)$, то при упомянутых условиях ряд $\sum\limits_1^\infty a_n F_n(z)$ сходится абсолютно и равномерно внутри G^*.

Приведем теперь теоремы Абеля и Таубера для рядов (1). В отличие от степенных рядов, для рядов (1) случаи $l < 1$, $l = 1$, $l > 1$ существенно различны. Если $l < 1$, то ряд (1) сходится абсолютно и равномерно внутри G_R $(R = 1/l > 1)$, и для $z \in G_R - K$ имеем

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n \Phi_n(z) = \sum_0^\infty a_n [\Phi(z)]^n + \sum_0^\infty a_n F_n(z), \tag{8}$$

где второй ряд сходится абсолютно и равномерно внутри G_∞, а первый есть степенной ряд на плоскости w; из этого представления следует справедливость теорем Абеля и Таубера для рядов (1) в случае $l<1$. Если $l\geqslant 1$ и Γ_R — правильная аналитическая кривая, то в ее окрестности опять имеем представление (8), и упомянутые теоремы опять справедливы. Остается случай $l\geqslant 1$ и Γ_R — неаналитическая кривая. Ограничимся рассмотрением случая $l=1$, ибо второй ему аналогичен.

Теорема 1. *Если Γ такова, что $\Psi''(w)\in H_1$, то из сходимости ряда* (1) *в граничной точке z_0, в которой Γ имеет конечную кривизну, следует абсолютная и равномерная внутри G сходимость этого ряда.*

В самом деле, из разложения

$$F(w,\ z_0)=\frac{1}{w-w_0}\sum_0^\infty\frac{c_k}{w^k}=\sum_0^\infty\frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}},\quad |w|>1,$$

следует, что $\Phi_n(z_0)=w_0^n\sum\limits_0^n c_k w_0^{-k}$. Но $\sum\limits_0^\infty c_k w_0^{-k}=1$, ибо ряды функций $\Psi'(w)$ и $[\Psi(w)-\Psi(w_0)](w-w_0)^{-1}$ сходятся абсолютно на $|w|=1$ и последняя функция отлична от нуля. Значит, $|\Phi_n(z_0)|\to 1$ и $a_n\to 0$, а поэтому из (4) следует утверждение теоремы.

Существуют такие G и $\{a_n\}$, что ряд (1) сходится в граничной точке, но расходится в некоторой внутренней точке области G.

Укажем условия, при которых справедлива вторая теорема Абеля для рядов (1). В отличие от степенных рядов, здесь недостаточно предположить сходимость ряда (1) в граничной точке, нужно еще позаботиться о том, чтобы этот ряд сходился равномерно внутри G; мы будем предполагать, что $\{a_n\}$ и Γ удовлетворяют одному из вышеприведенных условий.

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из условий*: а) Γ *такова, что* $\Psi''(w)\in H_1$; б) $\Psi'(w)\in H_1$ *и* $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$; в) $\Psi'(w)\in H_\delta$, *а ряд* $\sum\limits_0^\infty|a_n|^\delta$ *сходится, где* $1<\delta\leqslant 2$; г) $a_n=O(\varepsilon_n/n)$, *где* $\varepsilon_n>0$ *и ряд* $\sum\limits_1^\infty\varepsilon_n^2/n$ *сходится. Если ряд* (1) *сходится в граничной точке z_0, в окрестности которой Γ — аналитическая кривая, то сумма ряда* (1) *стремится к* $f(z_0)=\sum\limits_0^\infty a_n\Phi_n(z_0)$ *при стремлении z к z_0 по любому некасательному пути.*

В окрестности точки z_0 имеем представление (8), причем второй ряд сходится равномерно в некотором круге с центром в точке z_0: так как первый ряд в окрестности точки z_0 есть степенной ряд на плоскости w, то теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\Psi'(w)\in H_r$ *и* $F(w)\in H_{r'}$ $\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1,\ r>1,\ r'>1\right)$. *Если ряд* (1) *сходится в граничной точке z_0, в которой Γ имеет конечную кривизну и такова, что $G(w,\ z_0)\in H_r$ и $\Psi''(w)$ существует в точке w_0, то сумма ряда* (1) *стремится к* $f(z_0)=\sum\limits_0^\infty a_n\Phi_n(z_0)$ *при стремлении z к z_0 по любому некасательному пути.*

Теорема 4. *Пусть Γ — спрямляемая кривая, а $F(w)$ ограничена в единичном круге и $a_n=O(1/n)$. Если ряд* (1) *сходится в граничной точке z_0, в которой Γ имеет конечную кривизну и такова, что $G(w,\ z_0)\in H_1$ и $\Psi''(w)$ существует в точке w_0, то сумма ряда* (1) *стремится к* $f(z_0)=\sum_0^\infty a_n\Phi_n(z_0)$ *при стремлении* z *к* z_0 *по любому некасательному пути.*

Теоремы 3 и 4 доказываются одинаково. Так как ряд $\sum_0^\infty a_n w_0^n$ сходится, то $F(w)$ обладает в точке w_0 угловым граничным значением $F(w_0)$, и имеем

$$f(z_0)=\sum_0^\infty a_n\Phi_n(z_0)=F(w_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}F(w)\,G(w,\ z_0)\,dw;$$

используя это равенство, а также интегральное представление суммы ряда (1), нетрудно убедиться в справедливости теорем 3 и 4.

Аналогично доказываются следующие теоремы:

Теорема 5. *Пусть выполнено одно из условий:* а) Γ — *спрямляемая кривая и* $a_n=O(1/n)$; б) $a_n=O(\varepsilon_n/n)$, *где* $0<\varepsilon_n<c$ *и ряд* $\sum_1^\infty \varepsilon_n^2/n$ *сходится. Если сумма ряда* (1) *стремится к* $f(z_0)$ *при стремлении* z *по некоторому некасательному пути к точке* z_0, *в окрестности которой* Γ — *аналитическая кривая, то ряд* (1) *сходится в точке* z_0 *и* $f(z_0)=\sum_0^\infty a_n\Phi_n(z_0)$.

Теорема 6. *Пусть* Γ — *спрямляемая кривая, а* $f(z)$ *аналитическая в* G *и ограничена там по модулю. Если* $a_n=O(1/n)$ *и* $f(z)$ *стремится к* $f(z_0)$ *при стремлении* z *по некоторому некасательному пути к точке* z_0, *в которой* Γ *имеет конечную кривизну и такова, что* $G(w,\ z_0)\in H_1$ *и* $\Psi''(w)$ *существует в точке* w_0, *то ряд Фабера функции* $f(z)$ *сходится в точке* z_0 *и* $f(z_0)=\sum_0^\infty a_n\Phi_n(z_0)$.

Теорема 7. *Пусть* Γ — *спрямляемая кривая и* $\Phi'(z)\in E_r$, *а* $f(z)\in E_{r'}$ $\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1,\ r>1,\ r'>1\right)$. *Если* $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ *и* $f(z)$ *стремится к* $f(z_0)$ *при стремлении* z *по некоторому некасательному пути к точке* z_0, *в которой* Γ *имеет конечную кривизну и такова, что* $G(w,\ z_0)\in H_1$ *и* $\Psi''(w)$ *существует в точке* w_0, *то ряд Фабера функции* $f(z)$ *сходится в точке* z_0 *и* $f(z_0)=\sum_0^\infty a_n\Phi_n(z_0)$.

Существует такая область G и такая $\{a_n\}$, что сумма ряда (1) обладает в некоторой точке угловым граничным значением, $a_n=O(1/n)$, но ряд (1) все же расходится в этой граничной точке.

Выражаю глубокую благодарность М. А. Лаврентьеву, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Поступило
3 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950. [2] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, 1950. [3] P. Montel, Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Paris, 1910. [4] П. К. Суетин, ДАН, 88, № 1 (1953) *.

* В заметке ([4]) допущена неточность в формулировке теоремы 1. Теорему 1 следует читать: *Если* Γ *такова, что* $\Psi^{(p+2)}(w)\in H_1$ *и* $\Phi^{(p+2)}(z)\in E_1$, *а у* $f(z)$ *примитивная* p*-го порядка* $f_p(z)$ *принадлежит классу* E_1 *в* G, *то* $f(z)$ *представима своим рядом Фабера, сходящимся равномерно внутри* G *и абсолютно.*